

Fundamentals of fluid flow

Mohsen Soltanpour

Email: soltanpour@kntu.ac.ir

URL: <http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/>

استاتیک سیالات که در بخشهای قبل بحث شد تقریبا علم دقیقی است و تنها کمیتی که نیاز به آزمایش دارد **وزن مخصوص** است. از طرف دیگر طبیعت جریان یک سیال حقیقی بسیار پیچیده است و به آسانی نمی توان قوانین اساسی توصیف کننده حرکت کامل یک سیال را به روابط ریاضی تبدیل کرده و مورد استفاده قرار داد. در این بخش استفاده از آزمایشات تجربی ضروری است.

میدان سرعت: (Velocity field)

در دینامیک ذره (particles) یا جسم صلب (solid) می توان حرکت ذره یا جسم را مستقلا بررسی کرد. سرعت هر ذره را می توان با سه معادله زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} (v_x)_n = f_n(t) \\ (v_y)_n = g_n(t) \\ (v_z)_n = h_n(t) \end{cases} \quad \text{مولفه سرعت ذره } n \text{ ام:}^*$$

از آنجایی که در سیال، تعداد نامحدودی ذره وجود دارد، امکان بررسی حرکت آنها بطریق عملی نیست. برای مشخص کردن جریان از مختصات فضایی استفاده می شود:

$$\begin{cases} v_x = f(x, y, z, t) \\ v_y = g(x, y, z, t) \\ v_z = h(x, y, z, t) \end{cases} \quad \text{روش میدان (field approach):}^{**}$$

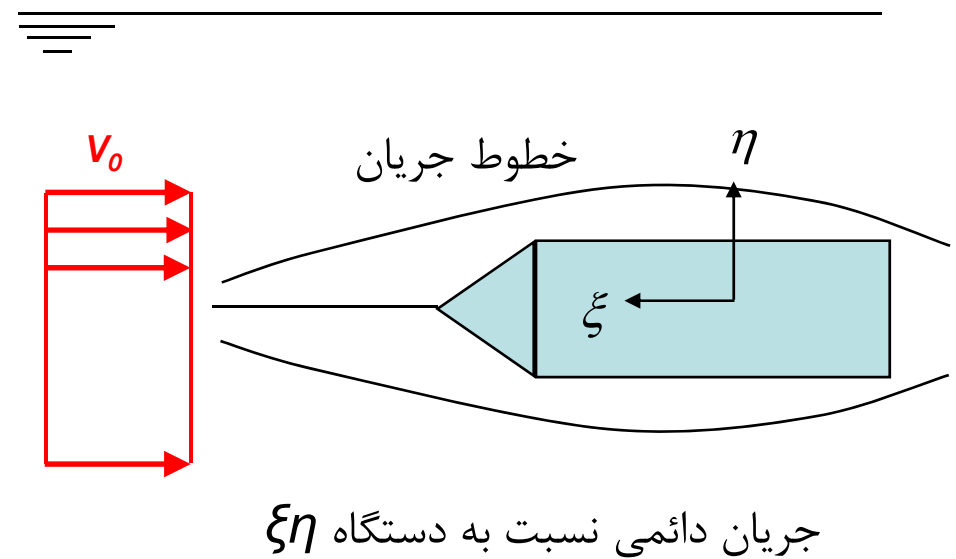
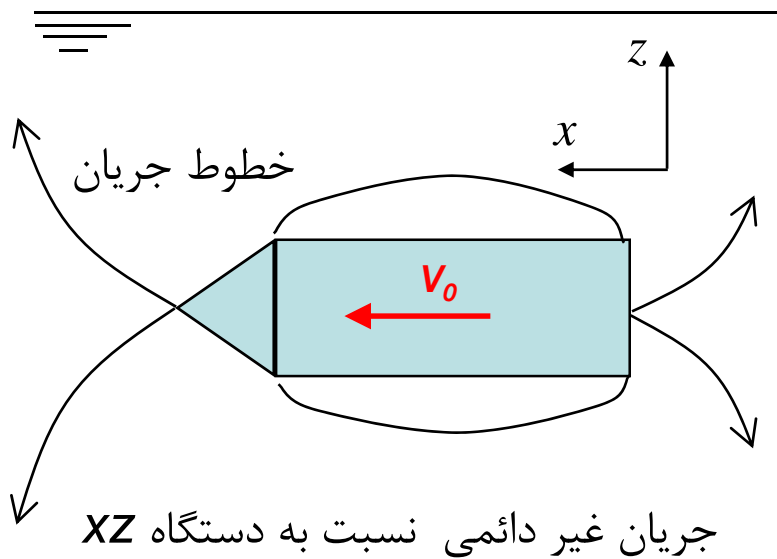
اگر خواص سیال و مشخصه های جریان در هر نقطه از فضا در طی زمان تغییر نکند جریان را **جریان دائمی** (**steady flow**) می نامیم. از طرف دیگر جریان وابسته به زمان **جریان غیر دائمی** (**unsteady flow**) نامیده می شود.

$$v_x = f(x, y, z)$$

$$v_y = g(x, y, z)$$

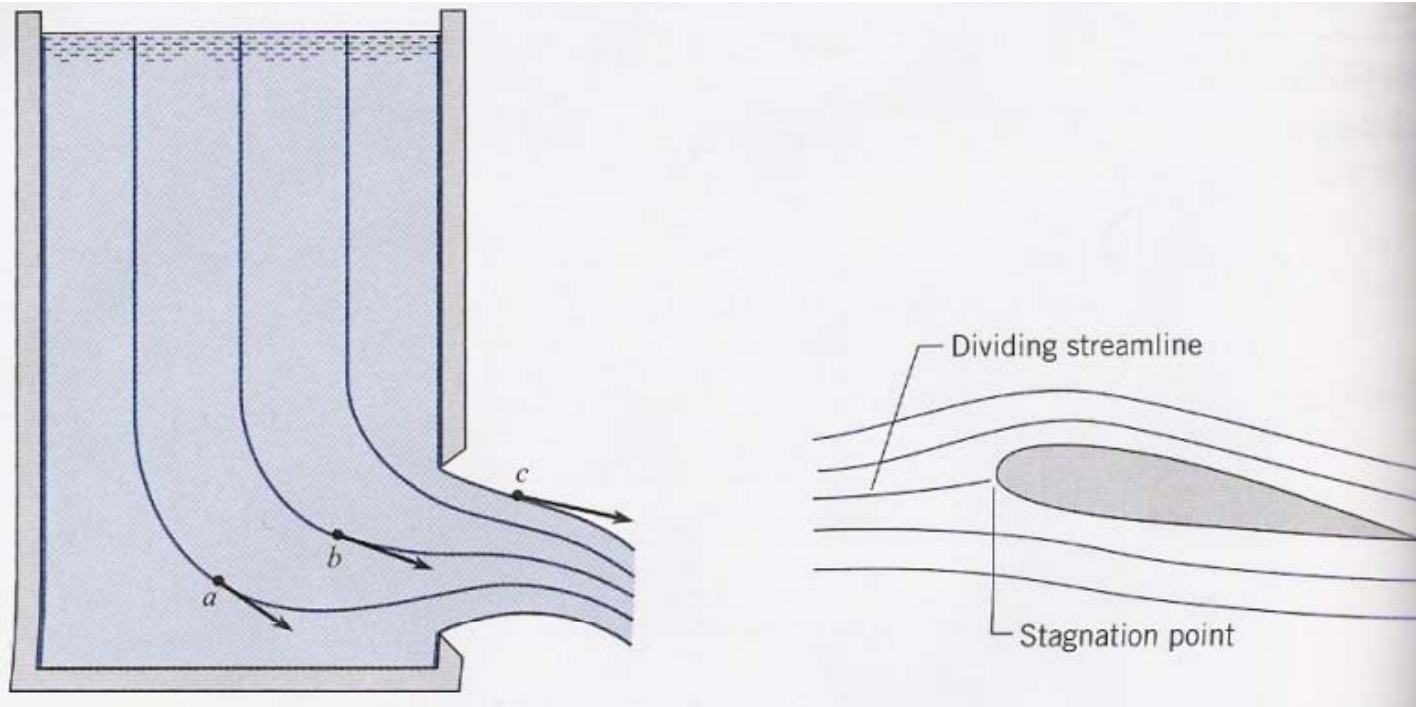
$$v_z = h(x, y, z)$$

با تغییر دستگاه مختصات می توان جریات غیر دائمی را به دائمی تبدیل کرد:



جریانها را می توان با **خطوط جریان** (**streamlines**) که همواره بر بردارهای سرعت ذرات سیال مماس می باشند بطور ترسیمی نمایش داد:

در جریان دائمی خطوط جریان ثابت می ماند و مسیرهای حرکت سیال (مسیر جریان **pathlines**) بر خطوط جریان منطبق هستند. اما در جریان غیر دائمی خطوط جریان تنها بطور لحظه ای معرف جریان بوده و در این حال تطابق ساده ای بین مسیر حرکت ذرات و خطوط جریان وجود ندارد.

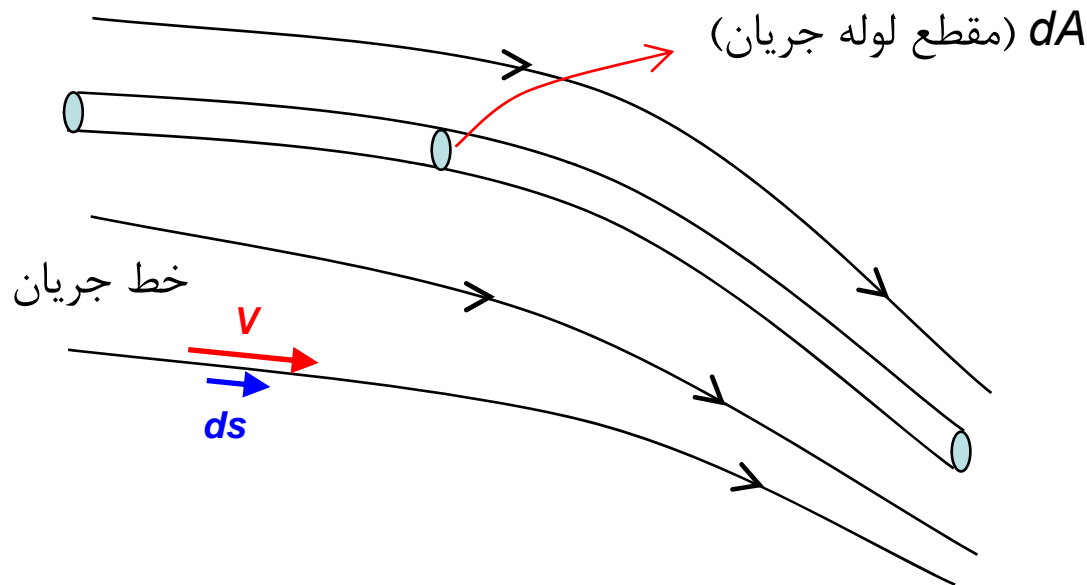


می توان معادله مسیر جریان را با استفاده از دینامیک ذرات تعیین کرد:

$$\begin{cases} v_{xp} = \frac{dx}{dt} \\ v_{yp} = \frac{dy}{dt} \\ v_{zp} = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

دسته خطوط جریانی که از پیرامون المان سطح کوچک dA در لحظه t رسم می شوند، لوله جریان (streamtube) را تشکیل می دهند.

مرز لوله جریان از خط جریان تشکیل می شود. لذا جریانی از سطوح جانبی لوله جریان نمی گذرد. به تعداد نامحدودی لوله جریان که با یکدیگر سطح مقطع محدودی را ایجاد می کنند، دسته لوله جریان گفته می شود.



$$\begin{cases} \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{cases}$$

\vec{v} و $d\vec{s}$ موازی هستند:

$$\vec{v} \times d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}}$$

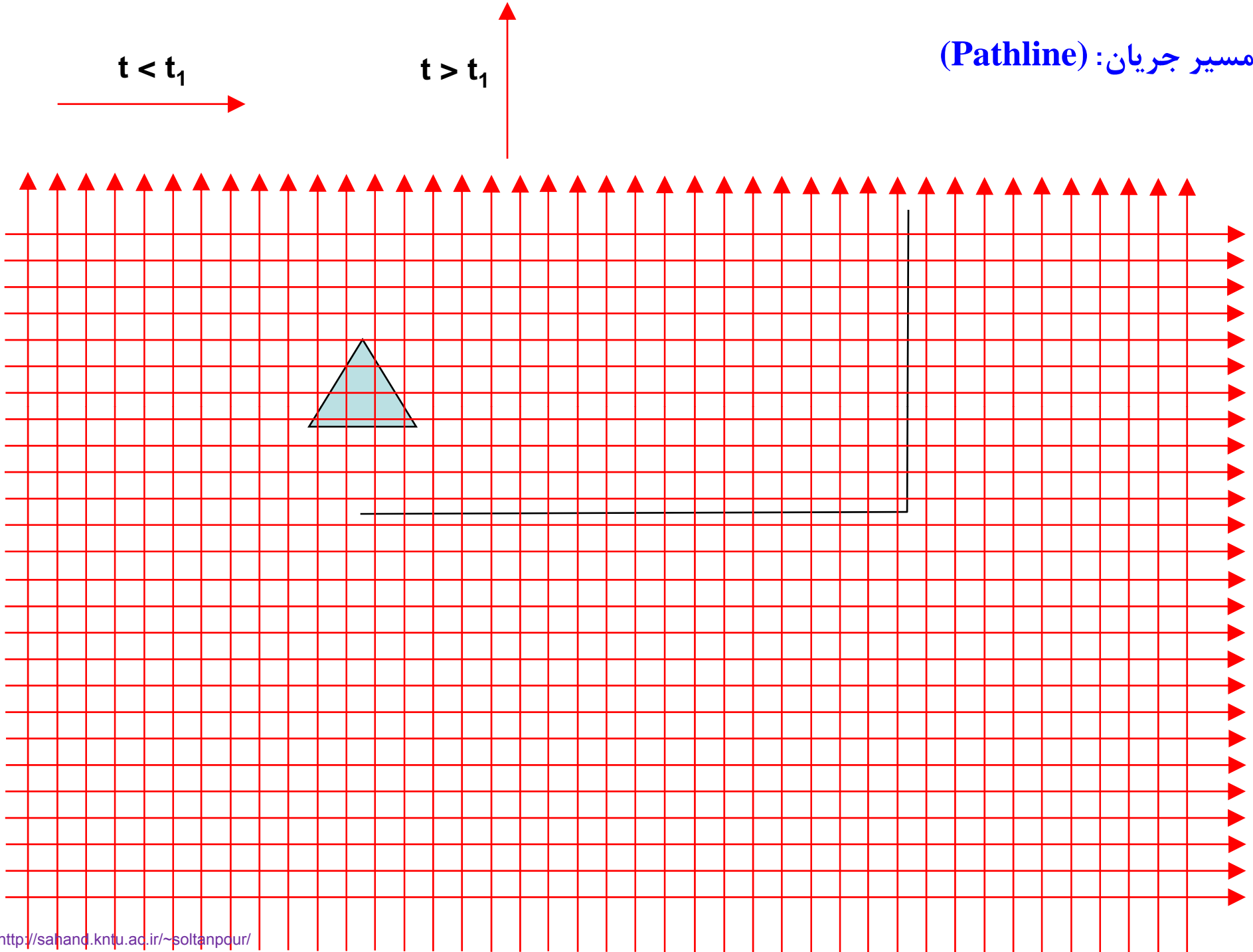
(در طول یک خط جریان)

روش دیگر برای به تصویر کشیدن الگوهای جریان تزریق رنگ یا دود (یا ذرات معلق) در نقطه ای از جریان و مشاهده مسیر حرکت آن در سیال می باشد. این خط اثر خط تمایل (streakline) نامیده می شود.

مسیر جریان: (Pathline)

$t < t_1$

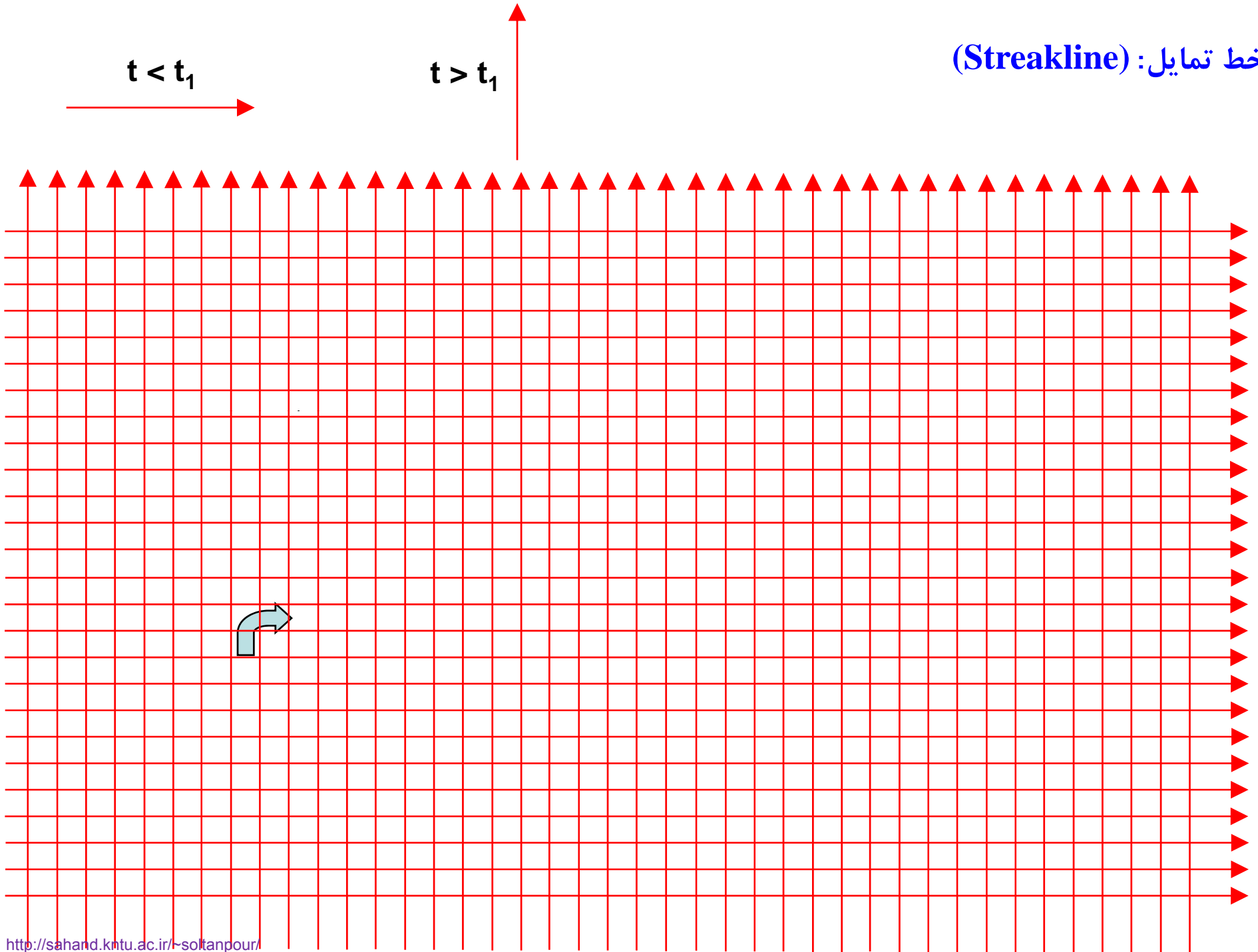
$t > t_1$



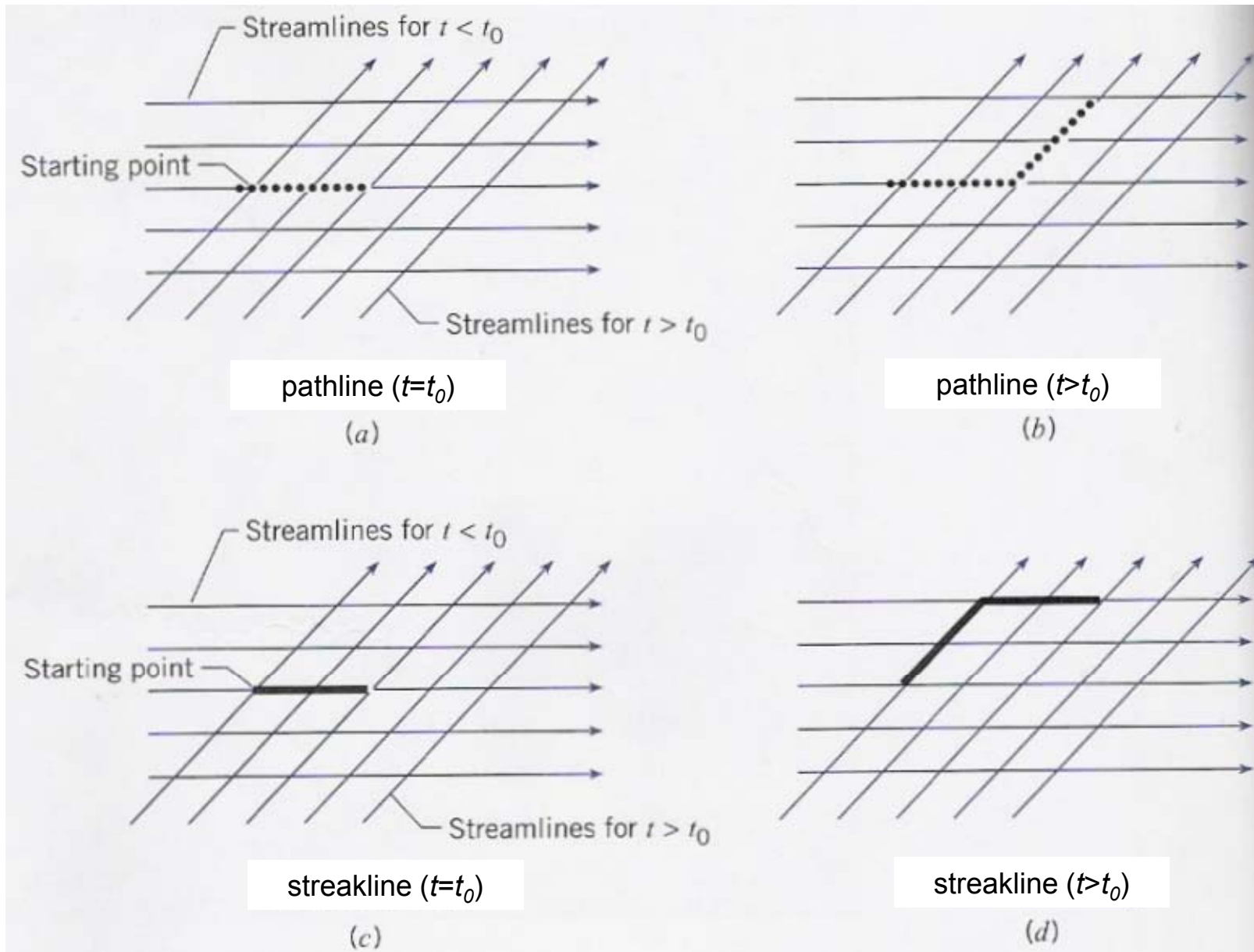
خط تمایل: (Streakline)

$t < t_1$

$t > t_1$



در جریان دائمی هر سه خط (خط جریان، مسیر جریان و خط تمایل) بر هم منطبق می شوند. در حالیکه خط جریان الگوی فعلی جریان را نشان می دهد، مسیر جریان و خط تمایل تاریخچه جریان را ارائه می دهند.

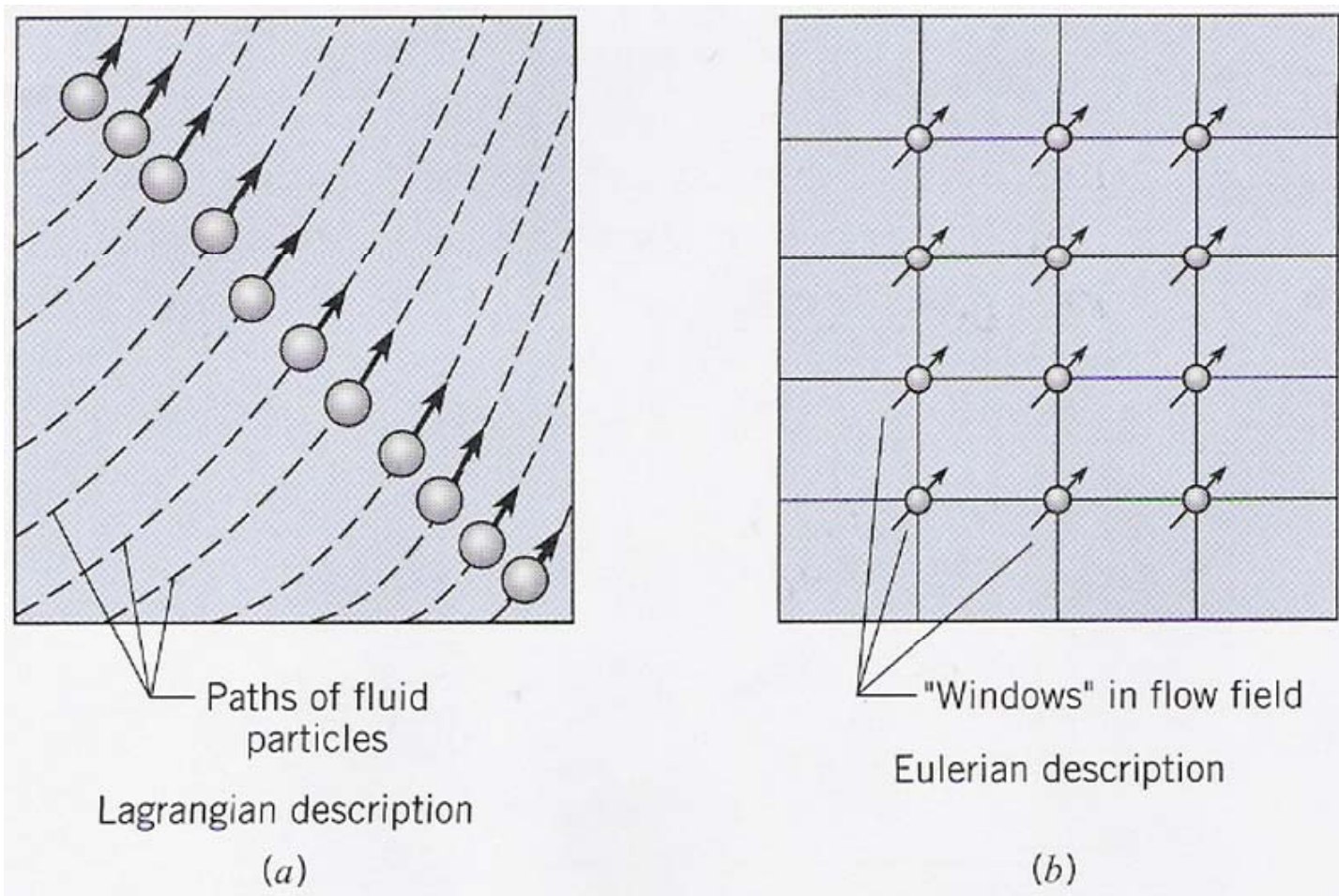


دیدگاه‌های مطالعه حرکت سیال: (Viewpoints)

اگر نقطه ثابتی را در فضا به مختصات X_1, Y_1, Z_1 در نظر بگیریم، سرعت ذرات گذرنده از این نقاط در هر لحظه را می‌توان با استفاده از میدان سرعت $V(X, Y, Z, t)$ بدست آورد. به این روش که در یک نقطه ثابت از فضا سرعت‌های رشته پیوسته‌ای از ذرات سیال که از آن نقطه می‌گذرند اندازه گرفته می‌شود، دیدگاه اولری گفته می‌شود.

در دیدگاه لاگرانژی، حرکت هر یک از ذرات سیال را با دنبال کردن آن ذره تعقیب می‌کنیم. در این حالت برای هر یک از ذرات سیال سه تابع زمانی $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ را خواهیم داشت که در حالت کلی با توابع زمانی سایر ذرات متفاوت است. $x(0)$ ، $y(0)$ و $z(0)$ موقعیت اولیه ذره را در لحظه $t=0$ نشان می‌دهد.
با تمرکز بر روی هر یک از ذرات:

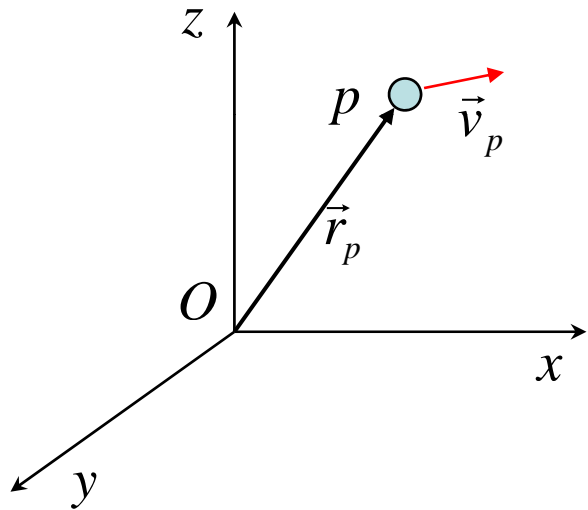
$$\begin{cases} v_x = f[x(t), y(t), z(t), t] \\ v_y = g[x(t), y(t), z(t), t] \\ v_z = h[x(t), y(t), z(t), t] \end{cases} \quad (\text{تنها تابعی از } t)$$



دو دیدگاه اولری و لاگرانژی به دائمی یا غیر دائمی بودن جریان بستگی ندارد. اگرچه هر دو دیدگاه در دینامیک سیالات بکار میروند، در اکثر مسائل جریانهای سیال توصیف اولری استفاده می شود.

شتاب یک ذره جریان: (Acceleration of a flow particle)

شتاب یک ذره سیال برابر است با نرخ تغییر سرعت ذره. در صورت استفاده از دیدگاه لاگرانژی، مسیر حرکت ذره تعقیب می شود. شتاب ذره از دو بار مشتق گیری بردار تغییر مکان بدست می آید و تنها تابعی از زمان است:



$$\vec{r}_p = x_p(t)\vec{i} + y_p(t)\vec{j} + z_p(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p}{dt} = u_p(t)\vec{i} + v_p(t)\vec{j} + w_p(t)\vec{k}$$

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} = a_{xp}(t)\vec{i} + a_{yp}(t)\vec{j} + a_{zp}(t)\vec{k}$$

در دیدگاه اولری، شتاب تابعی از زمان و مکان است (x, y و z تابعی از هستند):

$$\vec{v}(x, y, z, t) \implies d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

مشتق کلی (total derivative) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \left(\frac{D\vec{v}}{dt} \right)$

نرخ تغییرات سرعت در هر نقطه که با دنبال کردن یک ذره مشخص بدست می آید.

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

اما $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ مولفه های اسکالر سرعت هر ذره بوده و می توان آنها را با v_x, v_y, v_z نشان داد. بنابراین:

$$\vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

شتاب محلی (local acceleration)

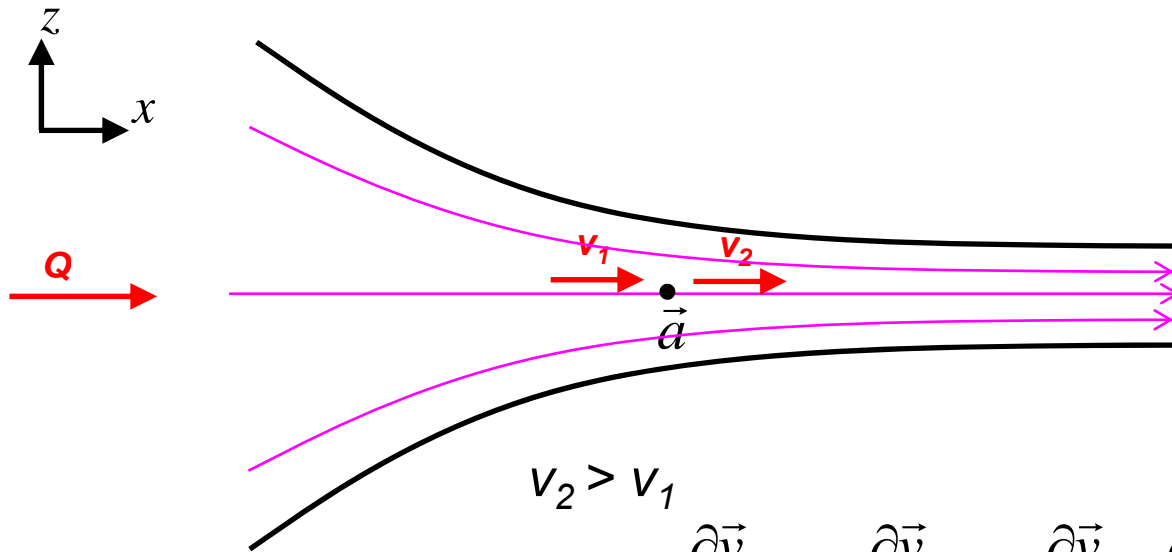
شتاب انتقالی (acceleration of transport)

یا شتاب جابجایی (convective acceleration)

در سه امتداد مختصات دکارتی:

$$\begin{cases} a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ a_y = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ a_z = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases}$$

شتاب انتقالی ناشی از جابجایی ذره در میدان سرعت است در حالی که شتاب محلی در اثر تغییر میدان سرعت در محلی که در لحظه توسط ذره اشغال شده است بوجود می آید. در جریان دائمی شتاب محلی صفر بوده و کافیست تنها شتاب جابجایی در نظر گرفته شود.



مثلا در محور زانویی روبرو در صورت دائمی بودن جریان ($Q=cte$)، بدلیل افزایش سرعت ناشی از کوچک شدن مقطع صرفا شتاب انتقالی ناشی از جابجایی ذره در راستای x وجود دارد.

$$v_2 > v_1$$

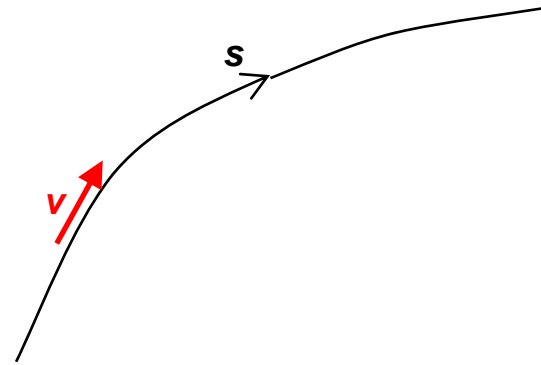
$$\vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} > 0$$

مختصات واقع بر خط جریان آسانترین سیستم مختصات قابل کاربرد می باشد (محل ذره بر روی خط جریان با S نشان داده می شود):

$$\vec{v} = \vec{v}(s, t) = v(s, t)\vec{e}_t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= v \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \end{aligned}$$

شتاب انتقالی
شتاب محلی



شتاب انتقالی را می توان با استفاده از مختصات مماسی و قائم (normal and tangential coordinates) به دو مولفه مماس بر مسیر و عمود بر آن تجزیه کرد:

$$\vec{v} = v\vec{e}_t$$

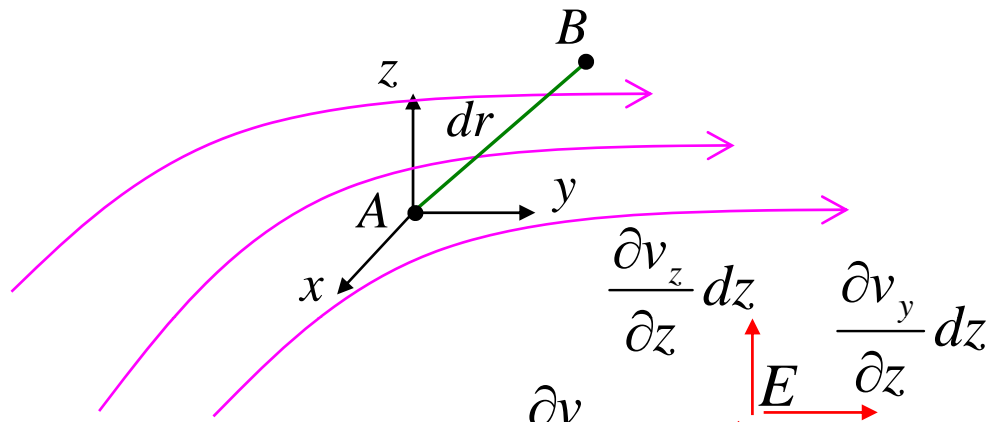
$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\begin{cases} a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

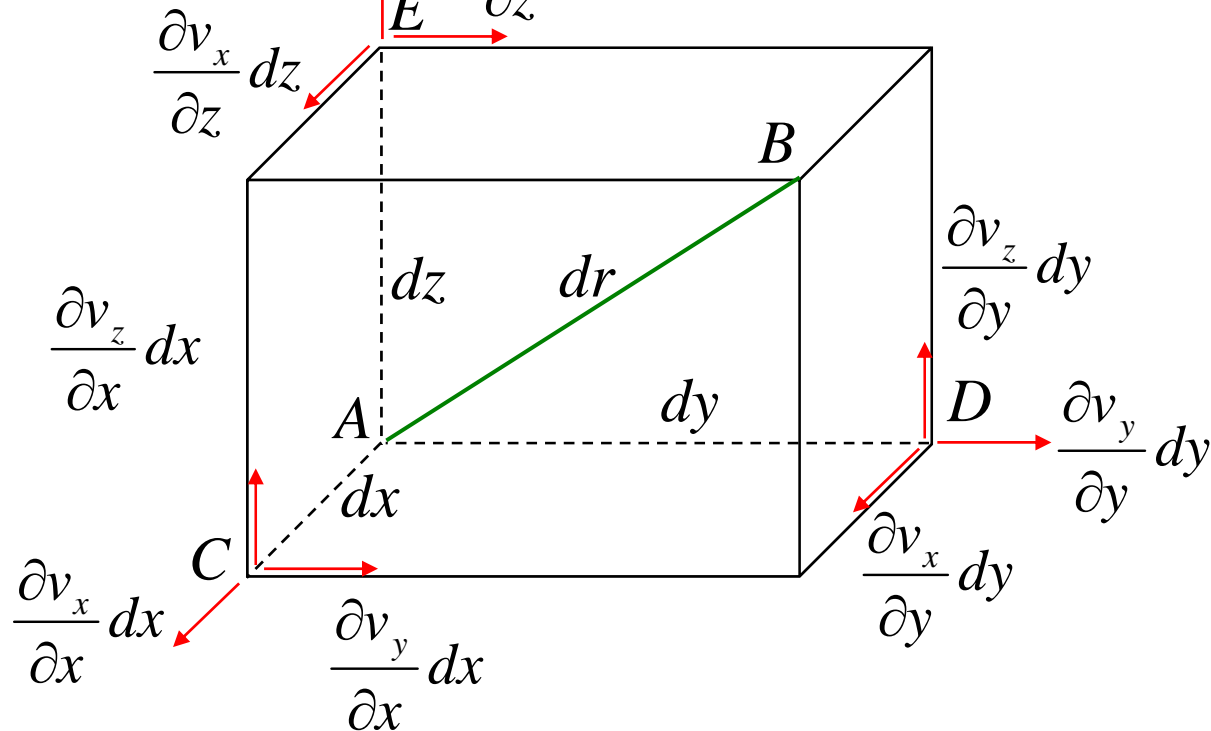
مولفه عمود بر مسیر که در صفحه بوسان (osculari) قرار دارد.

جریان غیر چرخشی: (Irrotational flow)

برای بررسی حرکت نسبی ذرات مجاور (adjacent flow particle) که به فاصله بسیار کمی از هم قرار دارند، دو ذره A و B را که در لحظه t به فاصله $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ از یکدیگر قرار در نظر می‌گیریم. نرخ تغییر شکل (deformation rate) و نرخ دوران (rotation rate) این مکعب مستطیل را می‌توان به کمک حرکات نسبی A و B نشان داد:



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\end{aligned}$$



$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx$$

$$\vec{v}_C - \vec{v}_A = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx \vec{k}$$

حرکت نسبی بین A و C

می توان حرکت بین ذرات D و E را نیز نسبت به A بیان کرد (شکل اسلاید قبل). اگر کرنش عمودی (normal strain) را به ϵ_{xx} نمایش دهیم:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

→ نرخ تغییر طول رشته AC

← طول اولیه

که در آن “(dot) نشان دهنده نرخ تغییرات (تغییر در واحد زمان) است. به شکل مشابه:

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{و} \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$\dot{\epsilon}_{ii}$ نرخ کرنش عمودی (normal strain rate) در سیال با بعد $1/s$ است. می توان نرخ کرنش برشی را نیز به شکل نرخ تغییر زاویه قائم رئوس مکعب نشان داد. سرعت زاویه ای دوران ضلع AC حول محور z ها در نقطه C برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

به همین ترتیب سرعت زاویه ای ضلع AD برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

بنابراین نرخ تغییر زاویه برشی در واحد زمان $\dot{\gamma}_{xy}$ (time rate of change of the shear angle) که همان نرخ تغییر زاویه CAD (که در لحظه t قائمه است) حول محور z ها را نشان می دهد برابر است با:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

به همین ترتیب نرخ تغییر زاویه CAE و DAE برابر است با:

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad \text{و} \quad \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

می توان نرخ تغییر شکل را با تانسور نرخ کرنش (strain rate tensor) نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

برای تعیین نرخ تغییر زاویه اضلاع مکعب مستطیل (rate of angular change of the sides)، سرعت زاویه ای اضلاع مکعب مستطیل حول محورهای دوران را در نظر می گیریم. سرعت زاویه ای AC حول محور Z ها در نقطه C برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

به همین ترتیب سرعت زاویه ای AD حول محور Z ها (با توجه به جهت مثبت محور Z ها) در نقطه D برابر است با:

$$\frac{-\frac{\partial v_x}{\partial y} dy}{dy} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

بنابراین نرخ تغییر زاویه CAD حول محور Z ها (در واقع نرخ دوران نیمساز زاویه قائمه بین اضلاع AC و AD) که در لحظه t قائمه است، برابر است با:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right]$$

نرخ متوسط دوران اضلاع متعامد AC و AD همان سرعت زاویه ای مکعب مستطیل حول محور محور Z ها (ω_z) است:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

به همین ترتیب، سرعت زاویه ای دوران مکعب مستطیل حول محور محور X ها و حول محور Y ها برابر است با:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad \text{و} \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

و یا:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

اگر بردار چرخش (vorticity vector) را با $\vec{\omega} = \text{curl} \vec{v} = \text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ نمایش دهیم:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \text{curl} \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

مفهوم فیزیکی دوران یک المان را می توان با **curl** میدان سرعت نمایش داد. اگر در هر نقطه از جریان $\vec{\omega} = 0$ باشد، جریان را غیر چرخشی (irrotational flow) می نامند. اگر در تعدادی از نقاط $\vec{\omega} \neq 0$ باشد، جریان چرخشی (rotational flow) است.

در جریان غیر چرخشی:

$$\vec{\omega} = \text{curl} \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

برای دوران ذره ای از سیال در جریانی که از ابتدا غیر چرخشی بوده است باید بر سطح المان تنش برشی ایجاد شود. از آنجایی که تنش برشی به لزجت سیال و نرخ تغییرات سرعت بستگی دارد، در اغلب سیالات در بخش بزرگی از جریان که گرادیان سرعت کوچک است، جریان غیر چرخشی باقی می ماند.

در ناحیه باریکی در مجاورت مرزهای جریان گرادیان سرعت بزرگ بوده و لذا علی رغم کوچک بودن لزجت جریان چرخشی خواهد بود. این ناحیه مجاور مرز **لایه مرزی (boundary layer)** نامیده می شود.

