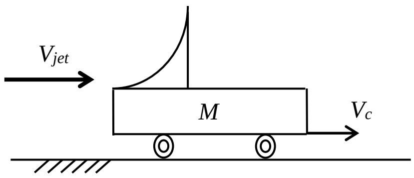
مکانیک سیالات (پایان ترم) وقت: ۱ ساعت نیمسال دوم ۰۲-۰۱

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی:

۱- معادله سرعت جریانی با روابط $\begin{cases} v_x = \dfrac{x}{1+t} \\ v_y = y \end{cases}$ نشان داده می شود. معادلات خطوط جریان (streamline) و مسیر حرکت ذراتی که در لحظه $t=t_0$ در نقطه (x_0,y_0) قرار دارند (pathline) را بدست آورید (۲ نمره).

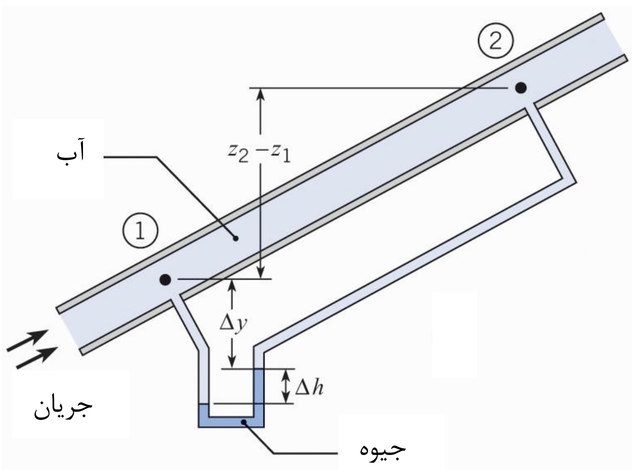


۲- جت آبی با سرعت V_{jet} و دبی Q_{jet} مطابق شکل در لحظه $t=0$ به پره ارابه‌ای به جرم کل M برخورد کرده و با منحرف شدن به سمت بالا (عمود بر مسیر حرکت ارابه قبل از شروع حرکت) به ارابه شتاب می‌دهد. با صرفنظر کردن از اصطکاک و مقاومت هوا:

الف- رابطه عمومی سرعت ارابه (V_C) نسبت به زمان را بدست آورید.

ب- اگر $\rho=1000\ kg/m^3$، $M=10\ kg$، $V_{jet}=10\ m/s$ و دبی جت $Q_{jet}=0.1\ m^3/s$ فرض شود، زمان رسیدن سرعت ارابه به $V_C=5$ m/s چقدر است؟

(۳ نمره)



۳- در لوله روبرو اگر فاصله مقاطع 1 و 2 برابر L، قطر لوله D، میزان بالاروی جیوه Δh، ضریب اصطکاک f و وزن مخصوص آب و جیوه به ترتیب γ_w و γ_m باشد نشان دهید سرعت جریان برابر است با:

$$V = \sqrt{\frac{2gD\Delta h(\gamma_m-\gamma_w)}{fL\gamma_w}}$$

(۲ نمره).

روابط: $\tau = \mu \dfrac{\partial V}{\partial y}$ $\quad P=\gamma h$ $\quad \gamma_{H_2O} = 9806(N/m^3) = 62.4\ lb/ft^3$ $\quad g = 9.81(m/s^2) = 32.18\ ft/s^2$

مسیر جریان: $v_{xp} = \dfrac{dx_p}{dt}, v_{yp} = \dfrac{dy_p}{dt}, v_{zp} = \dfrac{dz_p}{dt}$ $\quad$ خط جریان: $\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dy}{v_y} = \dfrac{dz}{v_z}$

قانون بقای جرم: $\oiint_{CS} \rho \vec{v}.d\vec{A} + \dfrac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \rho dV = 0$

اندازه حرکت (حجم کنترل اینرسیال)

$$\sum \vec{F} = \rho Q(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \qquad \oiint_{cs} \vec{T} dA + \iiint_{cv} \vec{B}\rho dv = \oiint_{cs} \vec{V}(\rho\vec{V}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} \vec{V}(\rho dv)$$

$$\oiint_{cs} \vec{r}\times\vec{T} dA + \iiint_{cv} \vec{r}\times\vec{B}\rho dv = \oiint_{cs} (\vec{r}\times\vec{V})(\rho\vec{V}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} (\vec{r}\times\vec{V})(\rho dv)$$

اندازه حرکت (حجم کنترل غیراینرسیال):

$$\oint\!\!\oint_{cs} \vec{T}dA + \iiint_{cv} \vec{B}\rho dv - \iiint_{cv} [\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]\rho dv = \oint\!\!\oint_{cs} \vec{V}_{xyz}(\rho \vec{V}_{xyz}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}_{xyz} \iiint_{cv} \vec{V}_{xyz}(\rho dv)$$

$$\vec{M}_s + \vec{M}_B - \iiint_{cv} \left\{ \vec{r} \times [\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \right\} \rho dv = \oint\!\!\oint_{cs} (\vec{r} \times \vec{V}_{xyz})(\rho \vec{V}_{xyz}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}_{xyz} \iiint_{cv} (\vec{r} \times \vec{V}_{xyz})(\rho dv)$$

قانون اول ترمودینامیک (ورودی و خروجی یک بعدی-دائمی):

$$[\frac{V_1^2}{2} + g(z_c)_1 + h_1] + \frac{dQ}{dm} = [\frac{V_2^2}{2} + g(z_c)_2 + h_2] + \frac{dW_s}{dm}$$

معادله برنولی: $\frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = Cte$

در لوله ها: فرمول هیگن-پویسلی: $h_f = \frac{128\mu QL}{\pi D^4 \gamma}$

فرمول دارسی-ویسباخ: $h_f = f\,\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}$

(جریان انتقالی و آشفته: $\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2.0\log[\frac{e}{D} + \frac{9.35}{R_e\sqrt{f}}]$ جریان آرام: $f = \frac{64}{R_e}$

جریان زبر: $f = \frac{1}{[1.14 - 2\log_{10}(\frac{e}{D})]^2}$)

روش هاردی کراس: $\Delta Q = \frac{-\sum_i^{loop}(h'_f)_i}{n\sum_i^{loop}\frac{(h'_f)_i}{Q'_i}}$ (با فرض استفاده از رابطه دارسی - ویسباخ n=2)

جواب:

۱- معادله خطوط جریان:

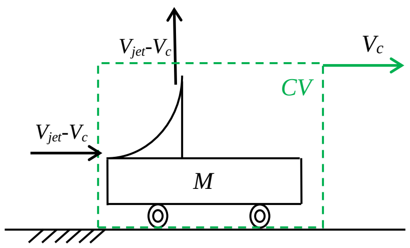
$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y} \qquad \frac{dx}{x/_{1+t}}=\frac{dy}{y} \qquad \int\frac{dy}{y}=(1+t)\int\frac{dx}{x} \qquad \ln y=(1+t)\ln x+\ln c \qquad \boxed{y=cx^{(1+t)}}$$

معادله مسیر حرکت ذراتی که در لحظه $t=t_0$ در نقطه (x_0,y_0) قرار دارند (مسیر جریان):

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{t+1}\\ \dfrac{dy}{dt}=y\end{cases} \quad \begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}=\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{t+1}\\ \displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y}=\int_{t_0}^{t}dt\end{cases} \quad \begin{cases}\ln x|_{x_0}^{x}=\ln(1+t)|_{t_0}^{t}\\ \ln x|_{y_0}^{y}=(1+t)|_{t_0}^{t}\end{cases} \quad \begin{cases}\ln\dfrac{x}{x_0}=\ln\dfrac{1+t}{1+t_0}\\ \ln\dfrac{y}{y_0}=t-t_0\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{1+t}{1+t_0}\\ \dfrac{y}{y_0}=e^{(t-t_0)}\end{cases} \quad \boxed{\begin{cases}x=x_0\dfrac{1+t}{1+t_0}\\ y=y_0e^{(t-t_0)}\end{cases}}$$

۲-

الف- حجم کنترل غیر اینرسیالی را در پیرامون ارابه در نظر می‌گیریم که همراه آن با سرعت V_C حرکت می‌کند:



$$\oint\!\!\oint_{cs}\vec{T}dA+\iiint_{cv}\vec{B}\rho dv-\iiint_{cv}[\ddot{\vec{R}}+2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\rho dv=\oint\!\!\oint_{cs}\vec{V}_{xyz}(\rho\vec{V}_{xyz}.d\vec{A})+\frac{\partial}{\partial t}_{xyz}\iiint_{cv}\vec{V}_{xyz}(\rho dv)$$

$$-\iiint_{cv}\ddot{\vec{R}}\rho dv=\oint\!\!\oint_{cs}\vec{V}_{xyz}(\rho\vec{V}_{xyz}.d\vec{A}) \qquad -a_xM=(V_{jet}-V_C)[-\rho(V_{jet}-V_C)A_1] \qquad a_x=\frac{[\rho A_1(V_{jet}-V_C)^2]}{M}$$

$$\frac{dV_C}{dt}=\frac{\rho A_1}{M}(V_{jet}-V_C)^2 \qquad \frac{dV_C}{(V_{jet}-V_C)^2}=\frac{\rho A_1}{M}dt \qquad (V_{jet}-V_C)^{-1}\Big|_0^{V_C}=\frac{\rho A_1}{M}t\Big|_0^{t}$$

$$\frac{1}{V_{jet}-V_C}-\frac{1}{V_{jet}}=\frac{\rho A_1}{M}t \qquad \frac{1}{V_{jet}-V_C}=\frac{\frac{\rho A_1}{M}V_{jet}t+1}{V_{jet}} \qquad V_{jet}-V_C=\frac{V_{jet}}{1+\frac{\rho A_1}{M}V_{jet}t}$$

$$V_C=V_{jet}-\frac{V_{jet}}{1+\frac{\rho A_1}{M}V_{jet}t} \qquad (Q_{jet}=V_{jet}A_1) \text{ و یا } \longrightarrow \qquad \boxed{V_C=V_{jet}-\frac{V_{jet}}{1+\frac{\rho Q_{jet}}{M}t}}$$

ب-

$$5=10-\frac{10}{1+\frac{1000\times0.1}{10}\times t} \qquad t=0.1\ \text{s}$$

۳-

$$\frac{V_1^2}{2g}+z_1+\frac{P_1}{\gamma_w}=\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\frac{P_2}{\gamma_w}+f\frac{L}{D}.\frac{V^2}{2g} \qquad \frac{P_1-P_2}{\gamma_w}=z_2-z_1+f\frac{L}{D}.\frac{V^2}{2g} \qquad \text{(I)}$$

$$P_2=P_1+\gamma_w(\Delta h+\Delta y)-\gamma_m\Delta h-\gamma_w(\Delta y+z_2-z_1)$$

$$P_2=P_1+(\gamma_w-\gamma_m)\Delta h-\gamma_w(z_2-z_1) \qquad \frac{P_1-P_2}{\gamma_w}=z_2-z_1+(\frac{\gamma_m}{\gamma_w}-1)\Delta h \qquad \text{(II)}$$

$$\text{(I) و (II)} \Longrightarrow \qquad (\frac{\gamma_m}{\gamma_w}-1)\Delta h=f\frac{L}{D}.\frac{V^2}{2g} \qquad \boxed{V=\sqrt{\frac{2gD\Delta h(\gamma_m-\gamma_w)}{fL\gamma_w}}}$$