Fundamentals of Fluid Flow

Mohsen Soltanpour

Email: soltanpour@kntu.ac.ir

URL: http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

استاتیک سیالات که در بخشهای قبل بحث شد تقریبا علم دقیقی است و تنها کمیتی که نیاز به آزمایش دارد وزن مخصوص است. از طرف دیگر طبیعت جریان یک سیال حقیقی بسیار پیچیده است و به آسانی نمی‌توان قوانین اساسی توصیف کننده حرکت کامل یک سیال را به روابط ریاضی تبدیل کرده و مورد استفاده قرار داد. در این بخش استفاده از آزمایشات تجربی ضروری است.

میدان سرعت (Velocity field)

در دینامیک ذرات (particles) یا جسم صلب (solid) می‌توان حرکت ذره یا جسم را مستقلا بررسی کرد. سرعت هر ذره را می‌توان با سه معادله زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} (v_x)_n = f_n(t) \\ (v_y)_n = g_n(t) \\ (v_z)_n = h_n(t) \end{cases}$$

مولفه سرعت ذره n ام:*

از آنجایی که در سیال تعداد نامحدودی ذره وجود دارد، امکان بررسی حرکت آنها به این طریق عملی نیست. برای مشخص کردن جریان می‌توان از مختصات فضایی استفاده کرد (روش میدان - field approach):**

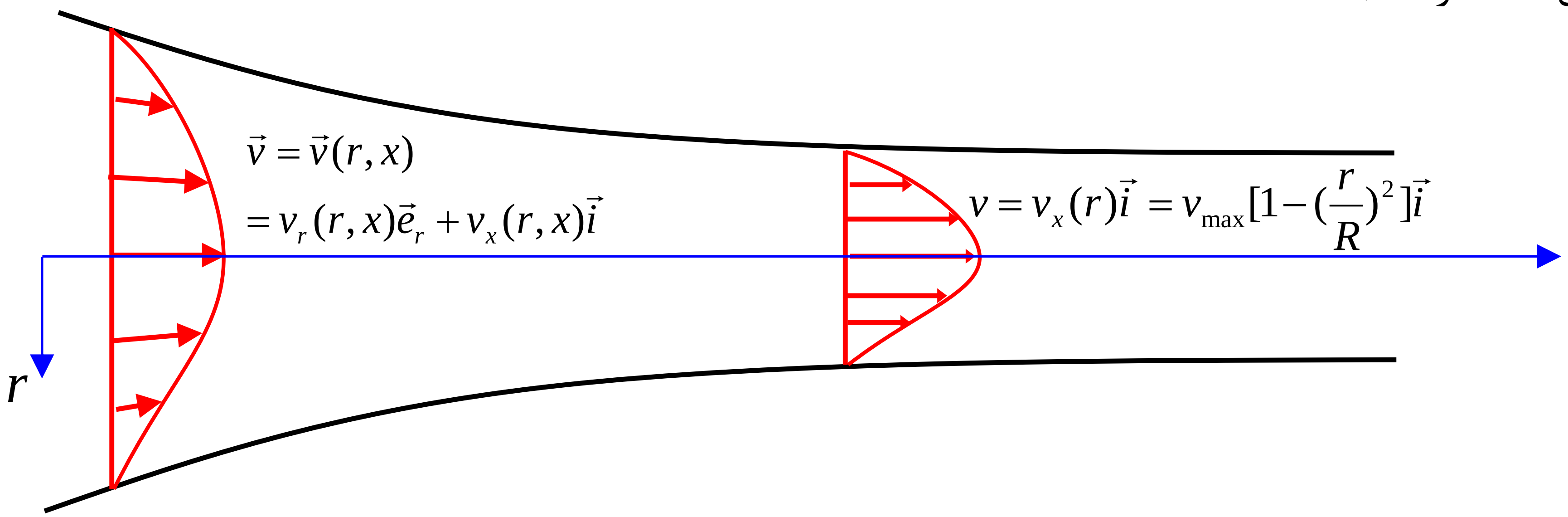
$$\begin{cases} v_x = f(x, y, z, t) \\ v_y = g(x, y, z, t) \\ v_z = h(x, y, z, t) \end{cases}$$

این میدان سرعت که تابعی از سه مختصات فضایی (x,y,z) و زمان (t) است جریان سه بعدی نامیده می‌شود*.

اگر خواص سیال و مشخصه های جریان در هر نقطه از فضا در طی زمان تغییر نکند جریان را جریان دائمی یا پایا (steady flow) می نامیم.** از طرف دیگر جریان وابسته به زمان جریان غیر دائمی یا ناپایا (unsteady flow) نامیده می شود. در جریان سه بعدی دائمی:

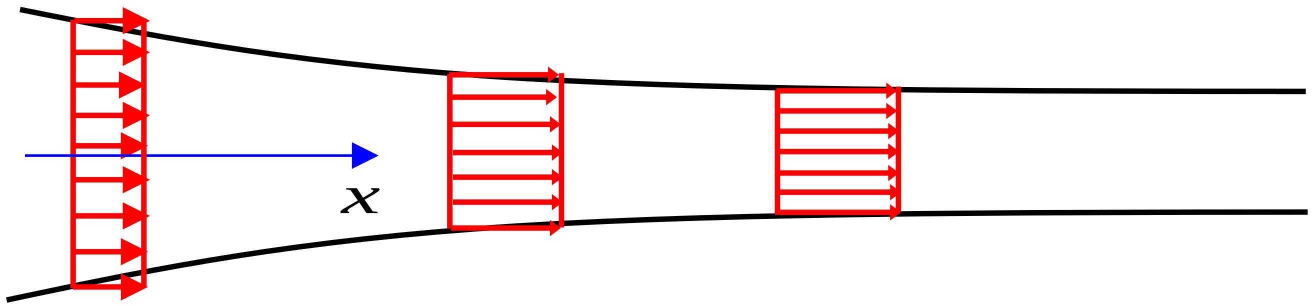
$$\begin{cases} v_x = f(x,y,z) \\ v_y = g(x,y,z) \\ v_z = h(x,y,z) \end{cases}$$

اگر چه اغلب میدانهای جریان سه بعدی‌اند اما تحلیلها بر مبنای ابعاد کمتر انجام می‌شوند. مثلا با استفاده از مختصات استوانه ای (x,r,θ)، جریان دائمی در لوله همگرا مستقیم دو بعدی (شکل سمت چپ) و در لوله با قطر ثابت یک بعدی است (شکل سمت راست).

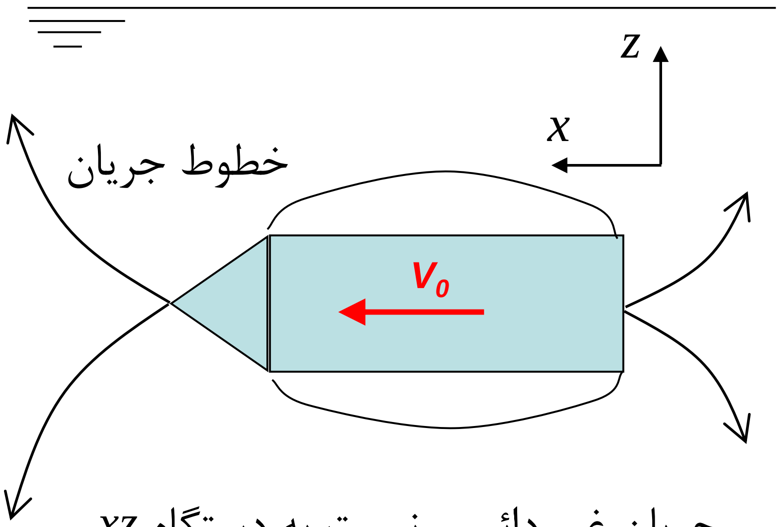


اگر مقدار و جهت سرعت جریان در تمام نقاط سیال یکسان باشد جریان یکنواخت (uniform) نامیده می‌شود***.

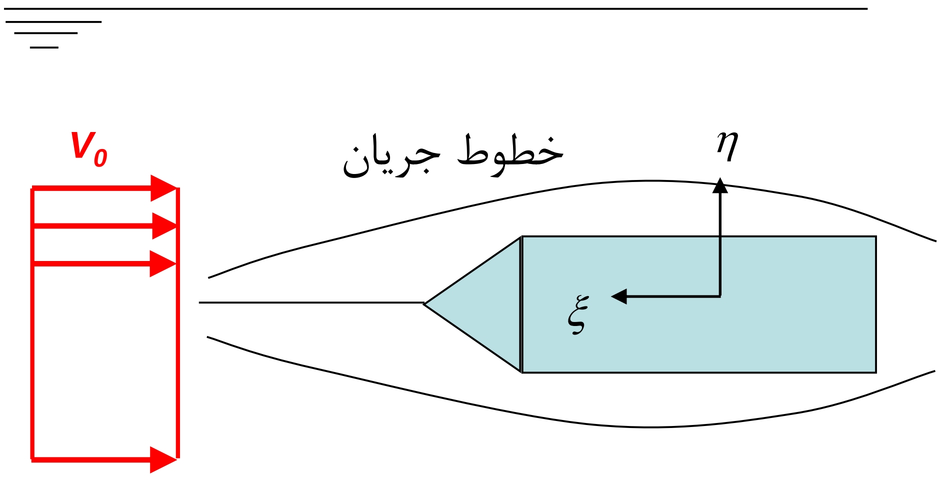
برای جریان یکنواخت در یک مقطع عرضی سرعت در تمام مقاطع عمود بر جریان دارای مقدار یکسانی است.* جریان دو بعدی شکل اسلاید قبل را با این فرض می‌توان به شکل زیر نشان داد:



گاهی با تغییر دستگاه مختصات می‌توان جریات غیر دائمی را به دائمی تبدیل کرد**:



جریان غیر دائمی نسبت به دستگاه xz

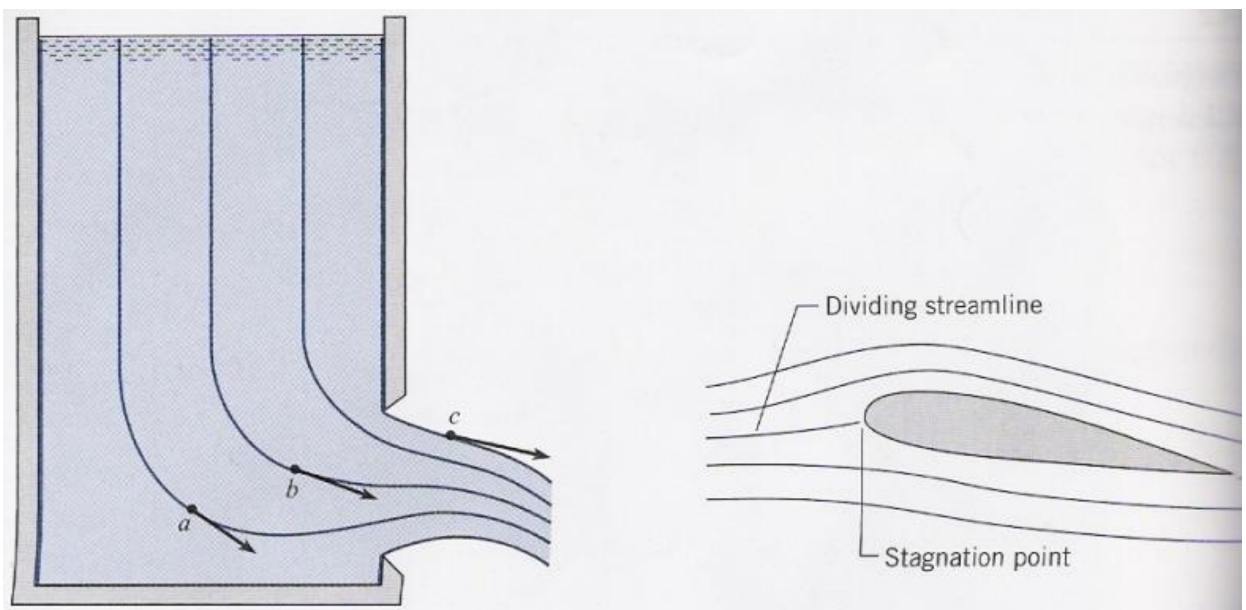


جریان دائمی نسبت به دستگاه $\xi\eta$

معادله مسیر جریان با استفاده از دینامیک ذرات تعیین می‌شود:

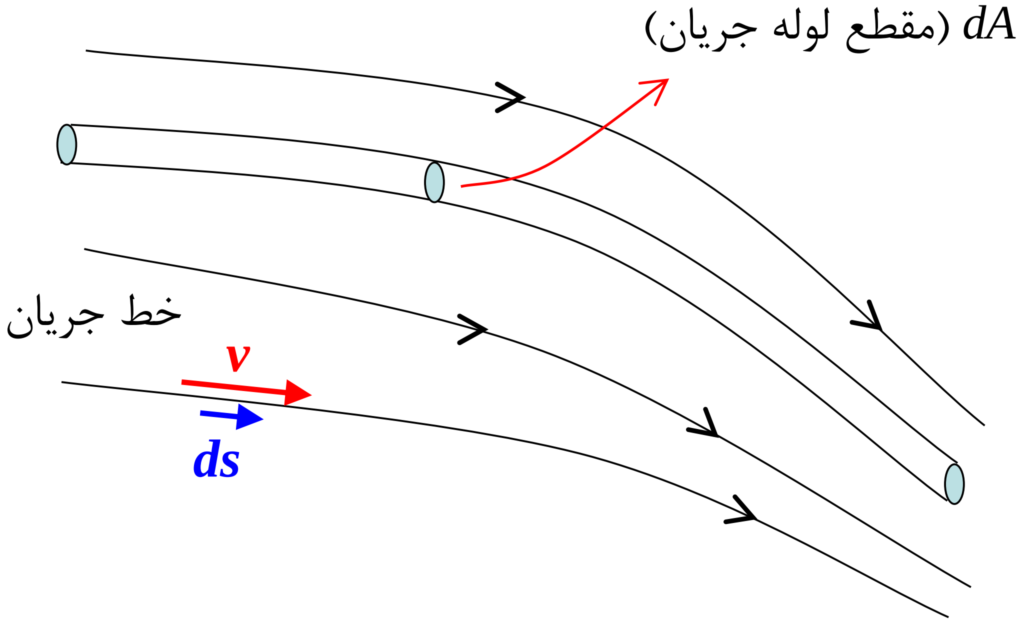
$$\begin{cases} v_{xp} = \dfrac{dx_p}{dt} \\ v_{yp} = \dfrac{dy_p}{dt} \\ v_{zp} = \dfrac{dz_p}{dt} \end{cases}$$

جریانها را می‌توان با خطوط جریان (streamlines) که همواره بر بردارهای سرعت ذرات سیال مماس می‌باشند بطور ترسیمی نمایش داد. در جریان دائمی خطوط جریان ثابت می‌ماند و مسیرهای حرکت سیال (مسیر جریان، pathlines) بر خطوط جریان منطبق هستند. اما در جریان غیر دائمی خطوط جریان تنها بطور لحظه‌ای معرف جریان بوده و در این حال تطابق ساده ای بین مسیر حرکت ذرات و خطوط جریان وجود ندارد.



دسته خطوط جریانی که از پیرامون المان سطح کوچک dA در لحظه t رسم می‌شوند، لوله جریان (streamtube) را تشکیل می‌دهند.

مرز لوله جریان از خط جریان تشکیل می‌شود و بنابراین جریانی از سطوح جانبی لوله جریان نمی‌گذرد. به تعداد نامحدودی لوله جریان که با یکدیگر سطح مقطع محدودی را ایجاد می‌کنند، دسته لوله جریان گفته می‌شود.



$$\begin{cases} \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \\ d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \end{cases}$$

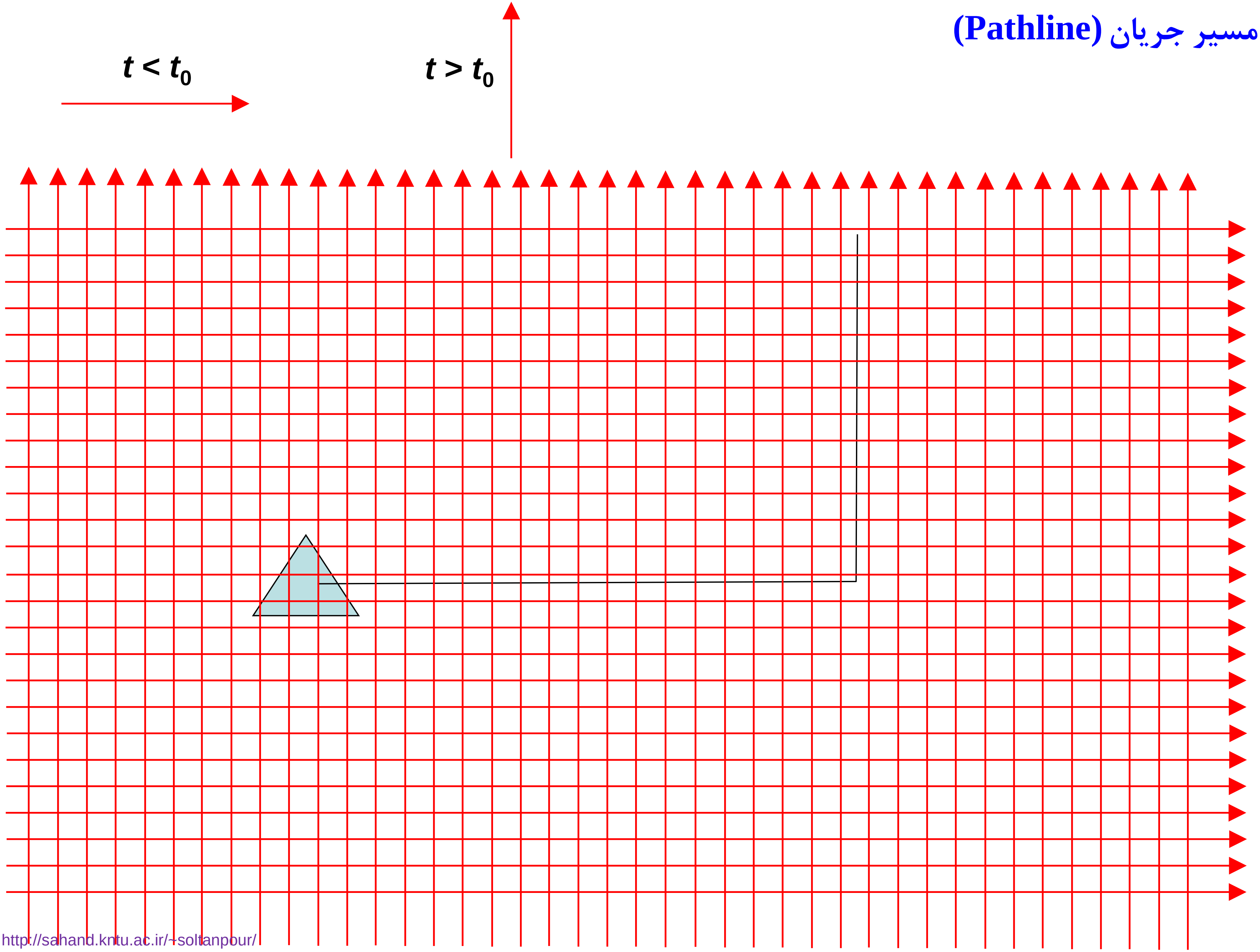
$\vec{v}$ و $d\vec{s}$ موازی هستند:

$$\vec{v} \times d\vec{s} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}}$$

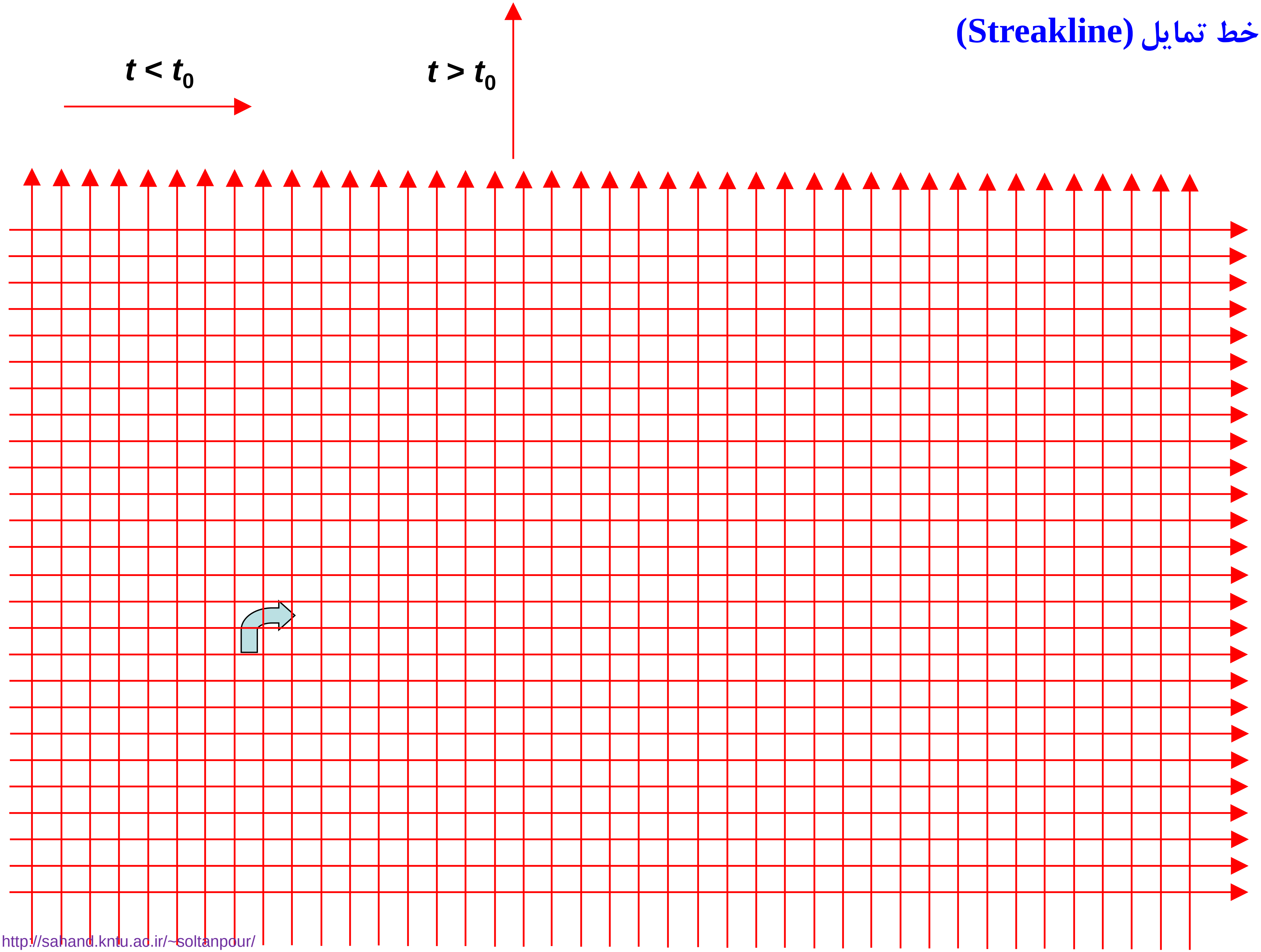
(در طول یک خط جریان)

روش دیگر برای به تصویر کشیدن الگوهای جریان تزریق رنگ یا دود (یا ذرات معلق) در نقطه ای از جریان و مشاهده مسیر حرکت آن در سیال می باشد. این خط اثر خط تمایل (streakline) نامیده می شود.

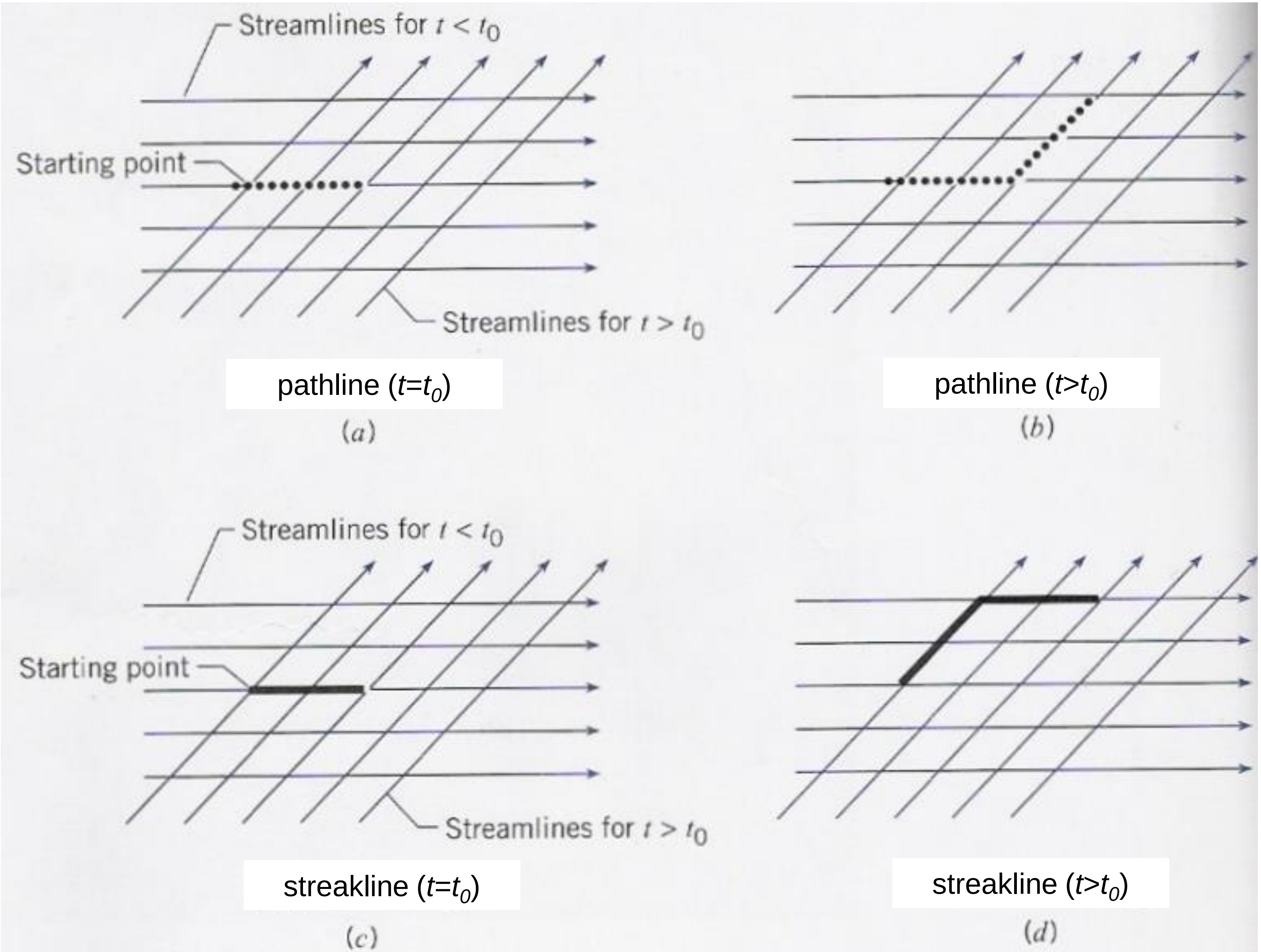
مسیر جریان (Pathline)



خط تمایل (Streakline)



در جریان دائمی هر سه خط (خط جریان، مسیر جریان و خط تمایل) بر هم منطبق می‌شوند. در حالی‌که خط جریان الگوی فعلی جریان را نشان می‌دهد، مسیر جریان و خط تمایل تاریخچه جریان را ارائه می‌دهند.



دیدگاههای مطالعه حرکت سیال: (Viewpoints)

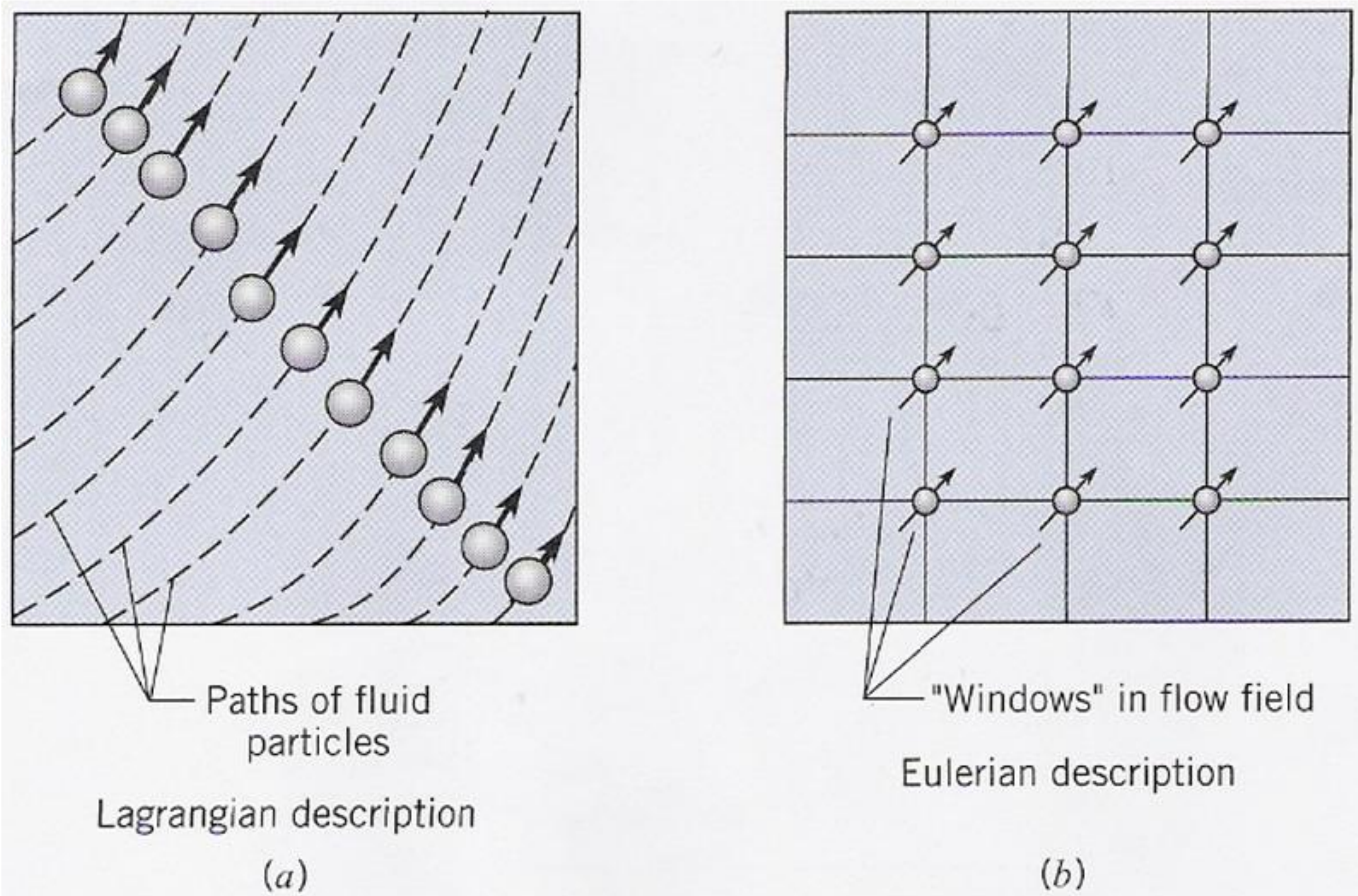
اگر نقطه ثابتی را در فضا به مختصات x_1, y_1, z_1 در نظر بگیریم، سرعت ذرات گذرنده از این نقاط در هر لحظه را می‌توان با استفاده از میدان سرعت $v(x,y,z,t)$ بدست آورد. به این روش که در یک نقطه ثابت از فضا سرعتهای رشته پیوسته‌ای از ذرات سیال که از آن نقطه می‌گذرند اندازه گرفته می‌شود، دیدگاه اولری گفته می‌شود.

$$\begin{cases} v_x = f(x,y,z,t) \\ v_y = g(x,y,z,t) \\ v_z = h(x,y,z,t) \end{cases}$$

در دیدگاه لاگرانژی، حرکت هر یک از ذرات سیال را با دنبال کردن آن ذره تعقیب می‌کنیم. در این حالت برای هر یک از ذرات سیال سه تابع زمانی $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ را خواهیم داشت* که در حالت کلی با توابع زمانی سایر ذرات متفاوت است. $x(0)$، $y(0)$ و $z(0)$ موقعیت اولیه ذره را در لحظه $t=0$ نشان می‌دهد. با تمرکز بر روی هر یک از ذرات:

$$\begin{cases} v_x = f(t) \\ v_y = g(t) \\ v_z = h(t) \end{cases}$$

که برای هر ذره تنها تابعی از t است.

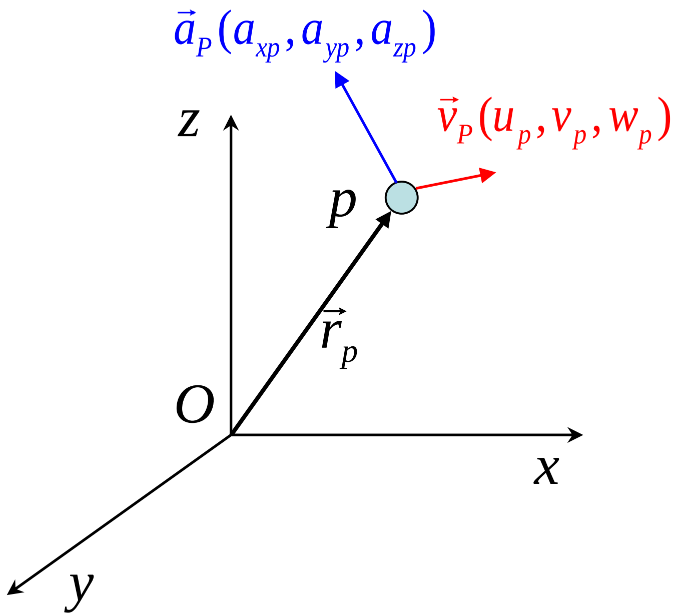


در توصیف لاگرانژ برای توصیف عمومی و کامل حرکت سیال مسیر تعداد بسیار بسیار زیادی از ذرات سیال باید مشخص گردد (شکل a). به همین دلیل اگر چه هر دو دیدگاه در دینامیک سیالات بکار می‌روند، در اکثر مسائل جریانهای سیال توصیف اولری استفاده می‌شود*.

دو دیدگاه اولری و لاگرانژی به دائمی یا غیر دائمی بودن جریان بستگی ندارد.

شتاب یک ذره جریان (Acceleration of a flow particle)

شتاب یک ذره سیال برابر است با نرخ تغییر سرعت ذره. در صورت استفاده از دیدگاه لاگرانژی، مسیر حرکت ذره تعقیب می‌شود. شتاب ذره از دوبار مشتق‌گیری بردار تغییر مکان بدست می‌آید و تنها تابعی از زمان است:



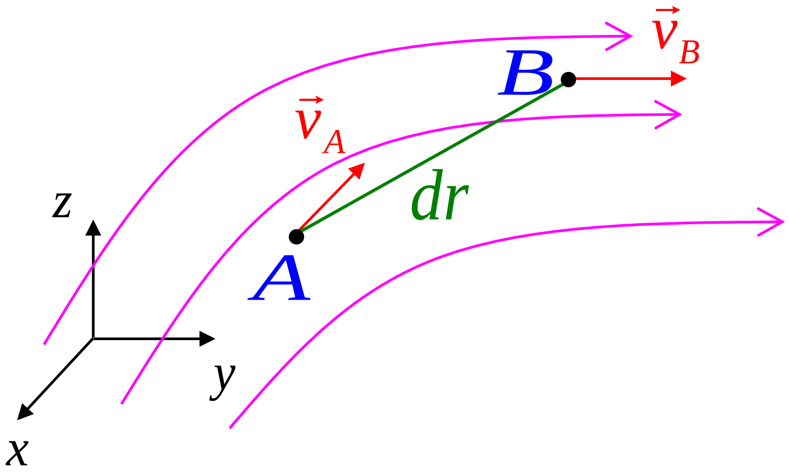
$$\vec{r}_p = x_p(t)\vec{i} + y_p(t)\vec{j} + z_p(t)\vec{k}$$

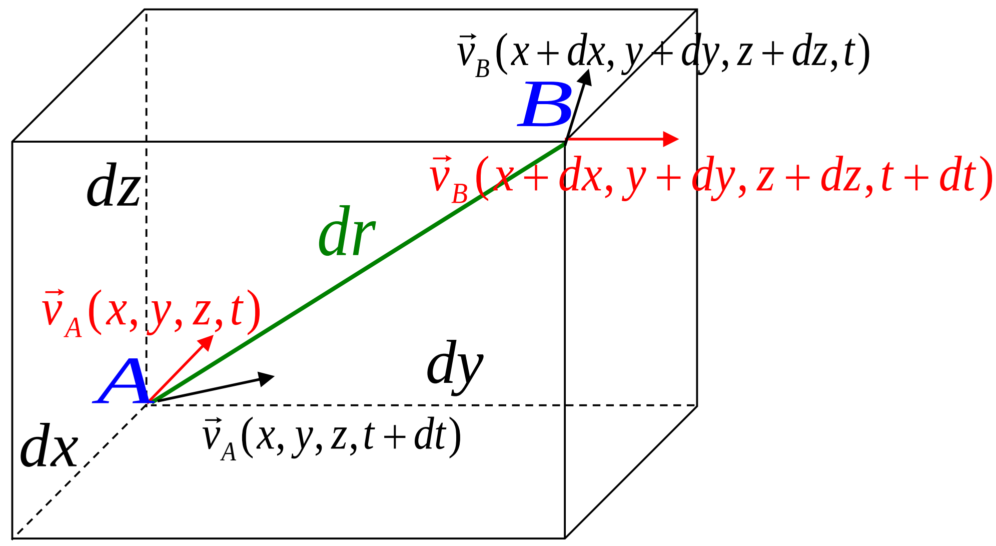
$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p}{dt} = \frac{dx_p}{dt}\vec{i} + \frac{dy_p}{dt}\vec{j} + \frac{dz_p}{dt}\vec{k}$$

$$= u_p(t)\vec{i} + v_p(t)\vec{j} + w_p(t)\vec{k}$$

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} = a_{xp}(t)\vec{i} + a_{yp}(t)\vec{j} + a_{zp}(t)\vec{k}$$

بنابراین در دیدگاه لاگرانژی جهت تعیین سرعت در نقطه‌ای از میدان جریان باید مسیر حرکت ذره‌ای که از نقطه مورد نظر می‌گذرد مشخص شده (بردار r_p) و سرعت از مشتق تغییر مکان بدست می‌آید. واضح است که کاربرد این روش برای تعیین سرعت یک نقطه دلخواه میدان جریان بسیار پرزحمت است*.





در دیدگاه لاگرانژی ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که در لحظه t در نقطه A قرار داشته و پس از زمان dt با طی مسافت dr به نقطه B می‌رسد. سرعت این ذره در نقطه A در لحظه t برابر است با:

$$\vec{v}(x,y,z,t)=\vec{v}_A(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\vec{r}_P(t+dt)-\vec{r}_P(t)}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$$

که u، v و w مولفه‌های سرعت ذره در نقطه A در لحظه t هستند. اگر برای تعیین شتاب ذره در نقطه A در لحظه t، سرعت همین ذره را درحرکت کوچک A تا B در نظر بگیریم:

$$\vec{a}(x,y,z,t)=\vec{a}_A(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\vec{v}_P(t+dt)-\vec{v}_P(t)}{dt}=\frac{\vec{v}_B(t+dt)-\vec{v}_A(t)}{dt}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

که a_x، a_y و a_z مولفه‌های شتاب ذره در نقطه A در لحظه t هستند.

در دیدگاه اولری، سرعت و شتاب (یعنی شتاب رشته ذراتی که در لحظه t از موقعیت مکانی x، y و z عبور می‌کنند) در میدان ۴ بعدی x، y، z و t تابعی از موقعیت فضایی و زمان است. برای محاسبه سرعت در نقطه B برحسب سرعت در نقطه A می‌توان از بسط تیلور در تغییرات کوچک dx، dy، dz و dt استفاده کرد:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + d\vec{v}$$

$$d\vec{v}(x,y,z,t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt$$

که در این رابطه $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz$ تغییرات سرعت دو ذره متفاوت در فاصله dr (اختلاف سرعت ذره‌ای

که در لحظه t در نقطه B با موقعیت $x+dx, y+dy, z+dz$ قرار دارد با ذره ای که در همین لحظه در نقطه A

قرار دارد) را نشان می‌دهد (شکل اسلاید قبل $\vec{v}_B(x+dx, y+dy, z+dz, t) - \vec{v}_A(x,y,z,t)$).

جمله $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt$ نیز نشان دهنده تغییرات زمانی سرعت در نقطه A (اختلاف سرعت دو ذره عبوری از A در زمان dt

می‌باشد (شکل اسلاید قبل $\vec{v}_A(x,y,z,t+dt) - \vec{v}_A(x,y,z,t)$).

برای بدست آوردن شتاب ذره واقع در نقطه A به مختصات (x,y,z) در لحظه t کافیست تغییرات بردار سرعت ($d\vec{v}$)

در واحد زمان ($\frac{d\vec{v}}{dt}$) در نظر گرفته شود.

مشتق کلی (total derivative)

$$\vec{a}=\vec{a}_A=\frac{\vec{v}_B(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt)-\vec{v}_A(x,y,z,t)}{dt}=\frac{d\vec{v}}{dt}\left(\frac{D\vec{v}}{dt}\right)$$

$$=\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

جمله آخر شتاب ناشی از اختلاف سرعت ذرات عبوری از نقطه A در زمان dt ($\frac{\vec{v}_A(x,y,z,t+dt)-\vec{v}_A(x,y,z,t)}{dt}$)

بوده و سایر جملات شتاب ناشی از اختلاف سرعت ذرات واقع در نقاط A و B در لحظه t را نشان می‌دهند

($\frac{\vec{v}_B(x+dx,y+dy,z+dz,t)-\vec{v}_A(x,y,z,t)}{dt}$). اما dx, dy, dz اختلاف موقعیت نقاط A و B بوده (به شکل اسلاید ۱۳مراجعه شود*) و لذا $\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}$ با مولفه های اسکالر سرعت ذره در نقطه A در لحظه t برابر هستند و می‌توان آنها را با u، v و w نشان داد:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{a}&=u\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\\&=\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=(\vec{v}.\nabla)\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\end{aligned}}$$

شتاب انتقالی (acceleration of transport)
یا شتاب جابجایی (convective acceleration)

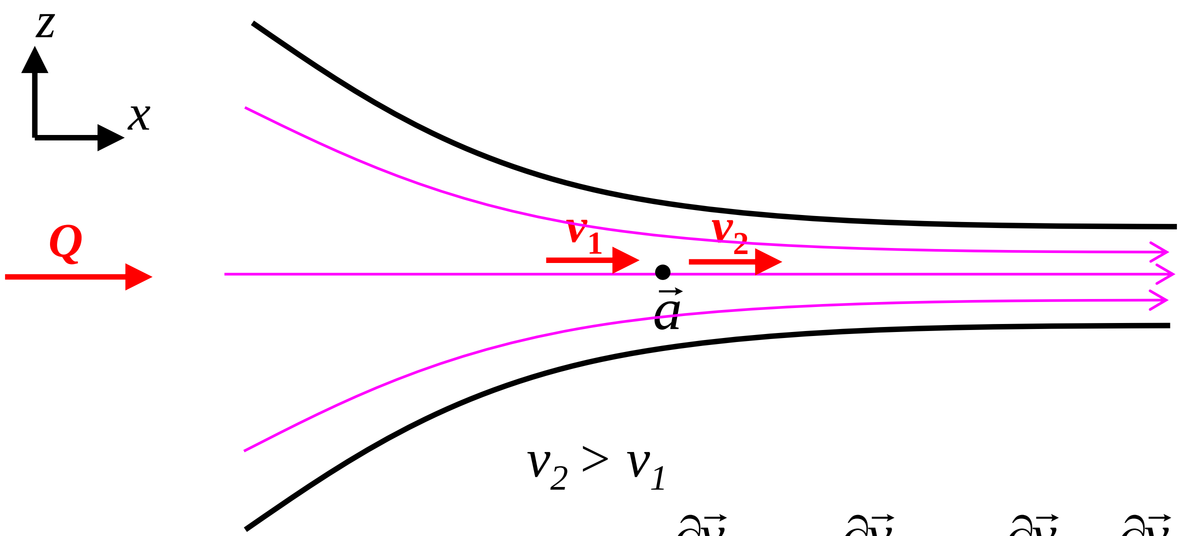
شتاب محلی (local acceleration)

در سه امتداد مختصات دکارتی:

$$\begin{cases} a_x = v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{\partial v_x}{\partial t} \\ a_y = v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{\partial v_y}{\partial t} \\ a_z = v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases}$$

شتاب انتقالی ناشی از جابجایی ذره در میدان سرعت است (اختلاف سرعت ذرات واقع در نقاط مختلف در یک لحظه) در حالی که شتاب محلی در اثر تغییر سرعت در یک نقطه (اختلاف سرعت ذرات عبوری در محلی که در لحظه t توسط ذره اشغال شده است) بوجود می‌آید. در جریان دائمی شتاب محلی صفر بوده و کافیست تنها شتاب جابجایی در نظر گرفته شود.

مثلا در محور زانویی روبرو در صورت دائمی بودن جریان ($Q=cte$)، بدلیل افزایش سرعت ناشی از کوچک شدن مقطع صرفا شتاب انتقالی ناشی از جابجایی ذره در راستای x وجود دارد.



$v_2 > v_1$

$$\vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} > 0$$

مختصات واقع بر خط جریان آسانترین سیستم مختصات قابل کاربرد می‌باشد (محل ذره بر روی خط جریان با S نشان داده می شود):

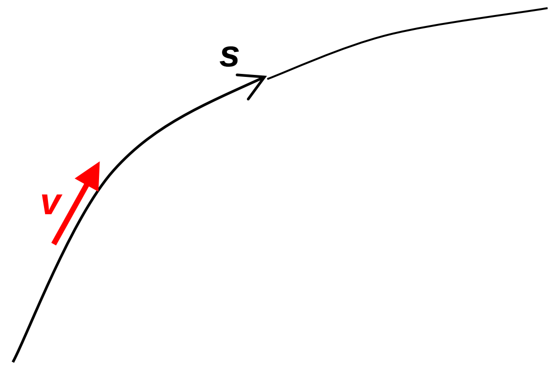
$$\vec{v}=\vec{v}(s,t)=v(s,t)\vec{e}_t$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial s}.\frac{ds}{dt}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

$$=v\frac{\partial\vec{v}}{\partial s}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

شتاب انتقالی

شتاب محلی



شتاب انتقالی را می توان با استفاده از مختصات مماسی و قائم (normal and tangential coordinates) به دو مولفه مماس بر مسیر و عمود بر آن تجزیه کرد:

$$\vec{v}=v\vec{e}_t$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a}=\dot{v}\vec{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\begin{cases} a_t=\dot{v}=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{ds}.\dfrac{ds}{dt}=v\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{1}{2}\dfrac{dv^2}{ds} \\ a_n=\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

مولفه عمود بر مسیر که در صفحه بوسان (osculari) قرار دارد.

مشتق کلی (Total derivative)

$$\frac{D}{Dt} = \underbrace{u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}}_{\text{(convective terms) جملات جابجایی}} + \frac{\partial}{\partial t}$$

جمله محلی (local term)

مشتق کلی (D/Dt) نرخ کلی تغییر ویژگی ذره‌ای از سیال که با سرعت (u,v,w) در حال حرکت است را نشان می‌دهد. این تغییرات ناشی از دو اثر زیر است:

۱- محلی (local) که مستقل از حرکت ذره بوده و در ذره ساکن نیز دیده می‌شود.

۲- جابجایی (convective) که نرخ تغییر خصوصیت را در لحظه مورد نظر در اثر حرکت ذره در میدانی که گرادیان آن خصوصیت وجود دارد، نشان می دهد.

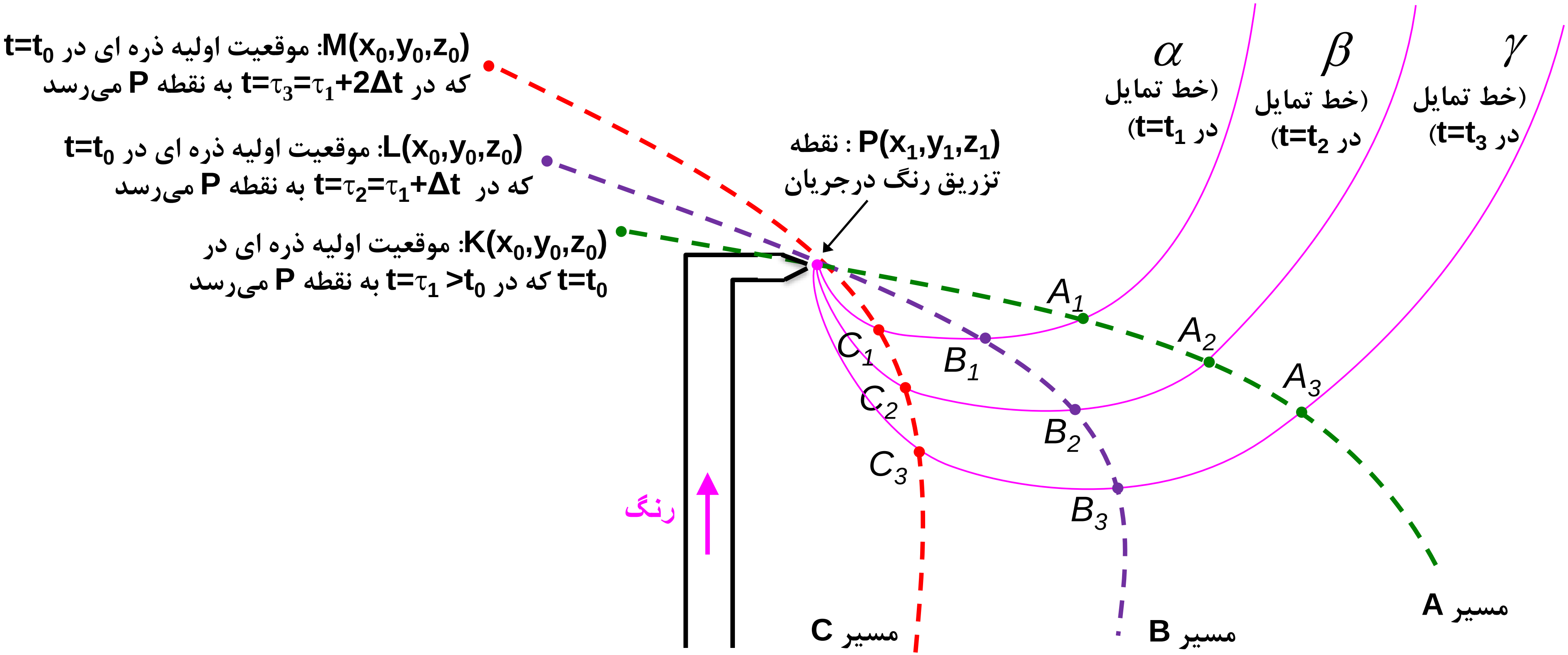
مثلا اگر دما روزانه ۱ درجه افزایش یافته و در هر ۱۰۰۰ کیلومتر حرکت در راستای x نیز ۱ درجه بیشتر شود کل نرخ تغییرات روزانه دمای پیرامون فردی که با اتومبیل در راستای x با سرعت u (km/day) حرکت می کند برابر است با:

$$\frac{DT}{Dt} = u\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

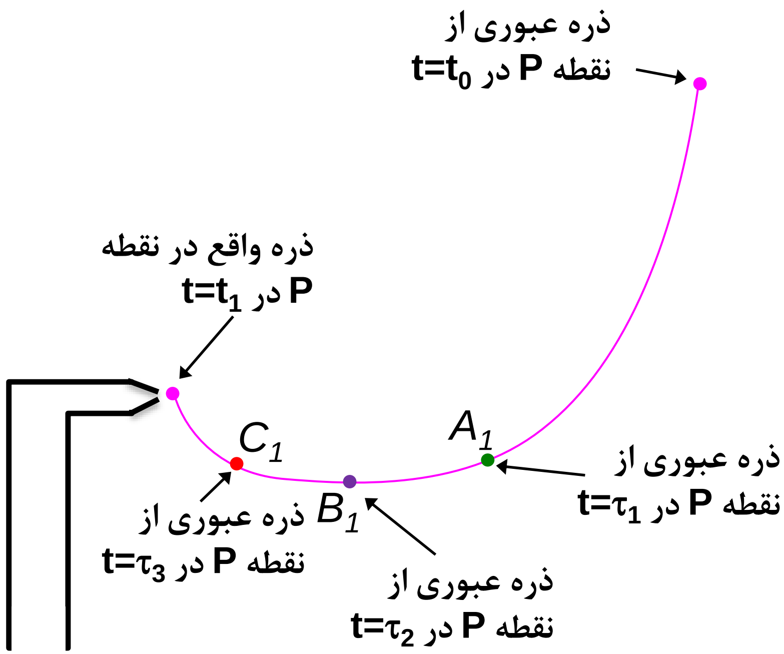
$$= \frac{u}{1000} + 1$$

تعیین معادله خط تمایل: (Streakline)

برای تعیین معادله خط تمایل فرض می‌کنیم در جریان غیردائمی در نقطه P در لحظه $t=t_0$ تزریق رنگ (یا دود) در نقطه $P\ (x_1,y_1,z_1)$ آغاز شود. در این صورت ذره دود با جریان در طول زمان $(t>t_0)$ حرکت می‌کند. ذره A را در جریان در نظر می‌گیریم که در $t=t_0$ در نقطه $K\ (x_0,y_0,z_0)$ بوده و در $t=\tau_1 > t_0$ به $P\ (x_1,y_1,z_1)$ برسد. این ذره در زمانهای بعدی مسیر A را طی می‌کند. در لحظه $t=\tau_2=\tau_1+\Delta t$ ذره دیگری (B) که به نقطه P رسیده رنگی شده و مسیر B را طی می‌کند. به همین ترتیب ذره C که در زمان $t=\tau_3=\tau_1+2\Delta t$ از P عبور می‌کند در مسیر C حرکت می‌کند. بنابراین در زمانی مثل t_1 ذره A در A_1، ذره B در B_1 و ذره C در C_1 قراردارد که این سه بر روی منحنی α قرار دارند. پس اگر در این لحظه از جریان عکس گرفته شود منحنی α نشان دهنده امتداد رنگ در جریان (موقعیت ذرات مختلف عبوری از P) است (خط تمایل در لحظه $t=t_1$).



بنابر این خط تمایل در لحظه $t=t_1$ در واقع همان موقعیت مکانی ذرات مختلف عبوری از P در محدوده زمانی $t_0<\tau<t_1$ نشان می‌دهد:



منحنی خط تمایل در لحظه $t=t_1$

$(t_0<\tau<t_1)$

به همین ترتیب عکس منحنی رنگ در لحظات $t=t_2$ و $t=t_3$ به ترتیب نشان دهنده خطوط تمایل β و γ در این لحظات در فاصله زمانی $t_0<\tau<t_2$ و $t_0<\tau<t_3$ هستند. لازم به ذکر است که در جریان دائمی مسیرهای A، B و C بر هم منطبق بوده و خط تمایل و مسیر جریان (و همچنین خط جریان) بر هم منطبق می‌شوند.

معادله خط تمایل را می توان به روش لاگرانژ بدست آورد. بدین منظورکافیست ذراتی که در زمانهای مختلف از نقطه $P(x_1,y_1,z_1)$ می‌گذرند تعقیب شده و موقعیت آنها در زمان یکسان تعیین گردد. معادله مسیر حرکت ذرات جریان که در $t=t_0$ در نقطه (x_0,y_0,z_0) قراردارند عبارت است از:

$$\begin{cases} x = f(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = g(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = h(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

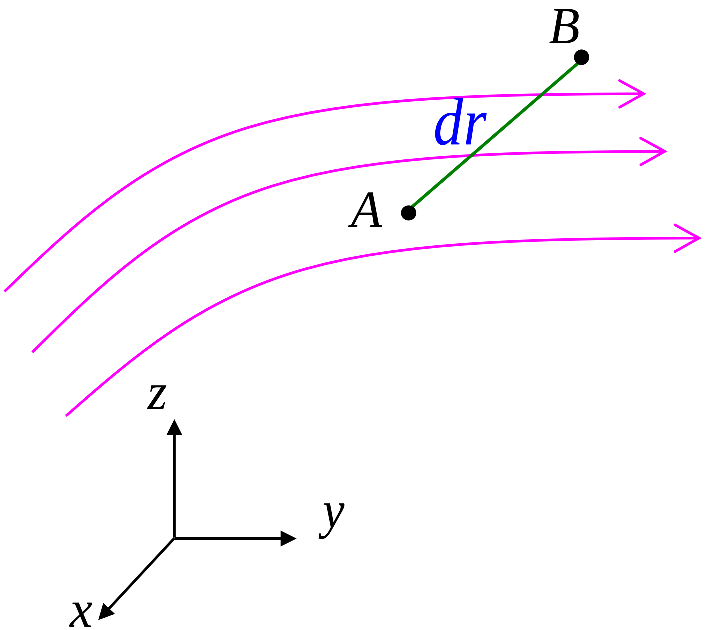
اگر از مجموعه ذرات جریان تنها ذراتی در نظر گرفته شوند که در لحظه $t=\tau$ از $P(x_1,y_1,z_1)$ می گذرند (مثلا ذراتی که در $t=t_0$ از نقاط اولیه K ، L یا M شروع به حرکت کرده و به ترتیب در لحظات τ_1، $\tau_1+\Delta t$ و $\tau_1+2\Delta t$ از P عبور می کند- مسیرهای A ، B و C):

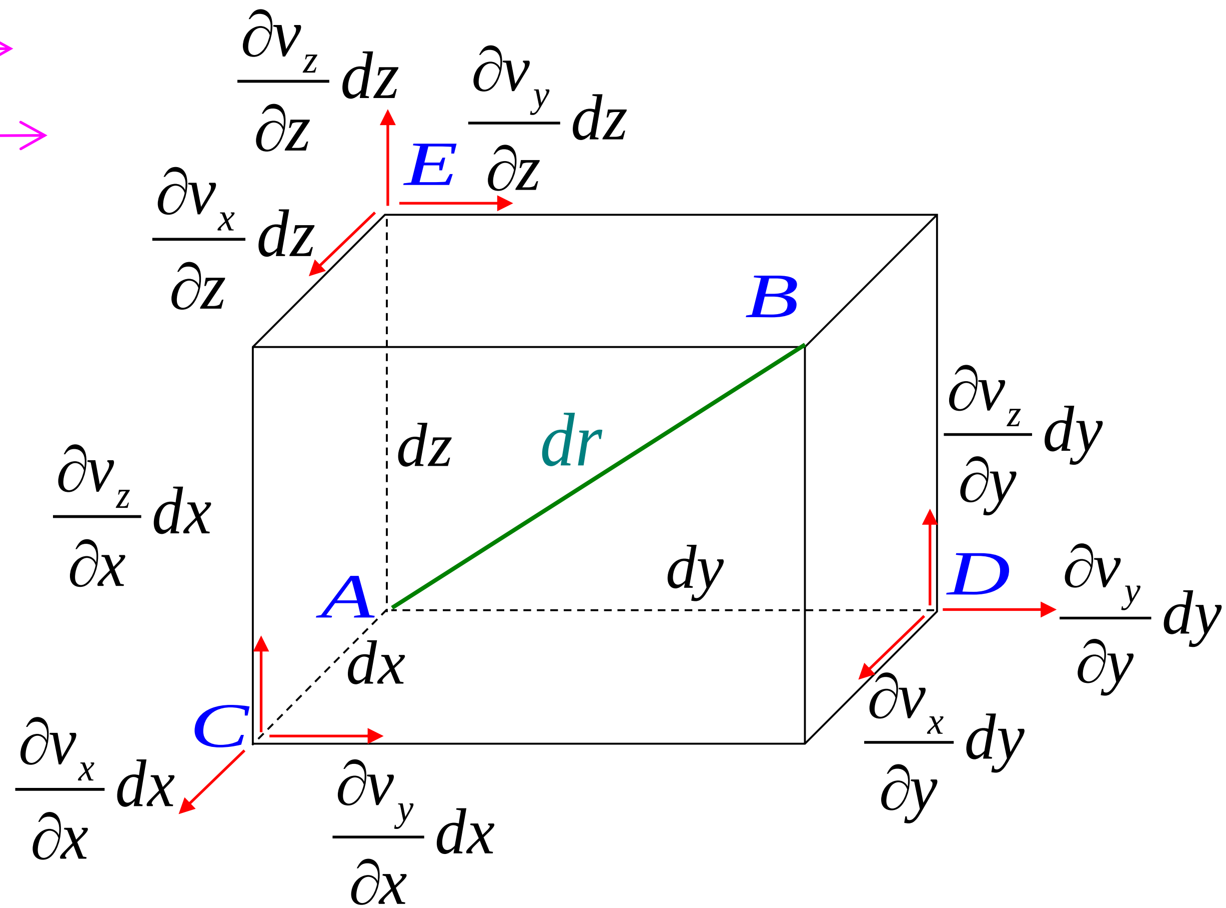
$$\begin{cases} x_1 = f(x_0, y_0, z_0, \tau) \\ y_1 = g(x_0, y_0, z_0, \tau) \\ z_1 = h(x_0, y_0, z_0, \tau) \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

این معادلات با تغییر τ مسیر حرکت ذرات مختلفی را که در حین حرکت از P عبور می‌کنند نشان می‌دهد (مسیرهای A ، B و C). با حذف x_0,y_0,z_0 از معادلات (I) و (II) دسته منحنیهایی بر حسب t و τ بدست می‌آید که حرکات ذرات مختلف عبوری (τ متغیر) از P را در لحظات مختلف (t متغیر) نشان می‌دهد. این معادلات با ثابت نگه داشتن τ و تغییر t مسیر حرکت یک ذره عبوری از P را نشان می‌دهد (مسیرهای A، B یا C که از P - متناظر با لحظه t_0 - به سمت پایین ادامه پیدا کرده اند). به همین ترتیب با ثابت نگه داشتن t و تغییر τ ($t_0<\tau<t_1$) معادله موقعیت ذرات مختلفی بدست می‌آید که از P عبور کرده و در لحظه t در موقعیت جدید قرار گرفته‌اند (معادله خطوط تمایل α، β و γ در لحظات معلوم $t=t_1$، $t=t_2$ و $t=t_3$).

جریان غیر چرخشی: (Irrotational flow)

برای بررسی حرکت نسبی ذرات مجاور (adjacent flow particle) که به فاصله بسیار کمی از هم قرار دارند، دو ذره A و B که در لحظه t به فاصله $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ از یکدیگر قرار داشته و در جریان در حال حرکت هستند را در نظر می گیریم. نرخ تغییر شکل (deformation rate) و نرخ دوران (rotation rate) این مکعب مستطیل را می توان به کمک حرکات نسبی A و B نشان داد:





$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx$$

$$\vec{v}_C - \vec{v}_A = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx\vec{k}$$

حرکت نسبی بین A و C

می‌توان حرکت بین ذرات D و E را نیز نسبت به A بیان کرد (شکل اسلاید قبل). اگرکرنش عمودی (normal strain) را به ε_{xx} نمایش دهیم:

نرخ تغییر طول رشته AC

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

طول اولیه

که در آن "." (dot) نشان دهنده نرخ تغییرات (تغییر در واحد زمان) است. به شکل مشابه:

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{و} \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$\dot{\varepsilon}_{ii}$ نرخ کرنش عمودی (normal strain rate) در سیال با بعد $1/s$ است. می‌توان نرخ کرنش برشی را نیز به شکل نرخ تغییر زاویه قائم رئوس مکعب نشان داد. سرعت زاویه‌ای دوران ضلع AC حول محور z ها در نقطه C برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial y}dy}{dy}=\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

به همین ترتیب سرعت زاویه ای ضلع *AD* برابر است با:

بنابراین نرخ تغییر زاویه برشی در واحد زمان $\dot{\gamma}_{xy}$ (time rate of change of the shear angle) که همان نرخ تغییر زاویه *CAD* (که در لحظه *t* قائمه است) حول محور *z* ها را نشان می دهد برابر است با:

$$\dot{\gamma}_{xy}=\dot{\gamma}_{yx}=(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y})$$

به همین ترتیب نرخ تغییر زاویه *CAE* و *DAE* برابر است با:

$$\dot{\gamma}_{xz}=\dot{\gamma}_{zx}=(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}) \quad \text{و} \quad \dot{\gamma}_{yz}=\dot{\gamma}_{zy}=(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y})$$

می توان نرخ تغییر شکل را با تانسور نرخ کرنش (strain rate tensor) نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

برای تعیین نرخ تغییر زاویه اضلاع مکعب مستطیل (rate of angular change of the sides)، سرعت زاویه ای اضلاع مکعب مستطیل حول محورهای دوران را در نظر می‌گیریم. سرعت زاویه ای AC حول محور z ها در نقطه C برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x}dx}{dx}=\frac{\partial v_y}{\partial x}$$

به همین ترتیب سرعت زاویه ای AD حول محور z ها (با توجه به جهت مثبت محور z ها) در نقطه D برابر است با:

$$\frac{-\frac{\partial v_x}{\partial y}dy}{dy}=-\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

بنابراین نرخ تغییر زاویه CAD حول محور z ها (در واقع نرخ دوران نیمساز زاویه قائمه بین اضلاع AC و AD) که در لحظه t قائمه است، برابر است با:

$$\frac{1}{2}[\frac{\partial v_y}{\partial x}+(-\frac{\partial v_x}{\partial y})]$$

نرخ متوسط دوران اضلاع متعامد AC و AD همان سرعت زاویه‌ای مکعب مستطیل حول محور محور z ها (ω_z) است:

$$\omega_z=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y})$$

به همین ترتیب، سرعت زاویه‌ای دوران مکعب مستطیل حول محور محور x ها و حول محور y ها برابر است با:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \qquad \text{و} \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

و یا:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}}$$

اگر بردار چرخش (vorticity vector) را با $curl\vec{v} = rot\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ نمایش دهیم*:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} curl\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

مفهوم فیزیکی دوران یک المان را می‌توان با curl میدان سرعت نمایش داد. اگر در هر نقطه از جریان $\vec{\omega} = 0$ باشد، جریان را غیرچرخشی (irrotational flow) می نامند. اگر در تعدادی از نقاط $\vec{\omega} \neq 0$ باشد، جریان چرخشی (rotational flow) است.**

درجریان غیر چرخشی:

$$\vec{\omega} = curl\vec{v} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

برای دوران ذره‌ای از سیال در جریانی که از ابتدا غیرچرخشی بوده است باید بر سطح المان تنش برشی ایجاد شود. از آنجایی که تنش برشی به لزجت سیال و نرخ تغییرات سرعت بستگی دارد، در اغلب سیالات در بخش بزرگی از جریان که گرادیان سرعت کوچک است، جریان غیرچرخشی باقی می ماند.

در ناحیه باریکی در مجاورت مرزهای جریان گرادیان سرعت بزرگ بوده و لذا علی رغم کوچک بودن لزجت جریان چرخشی خواهد بود. این ناحیه مجاور مرز لایه مرزی (boundary layer) نامیده می‌شود.