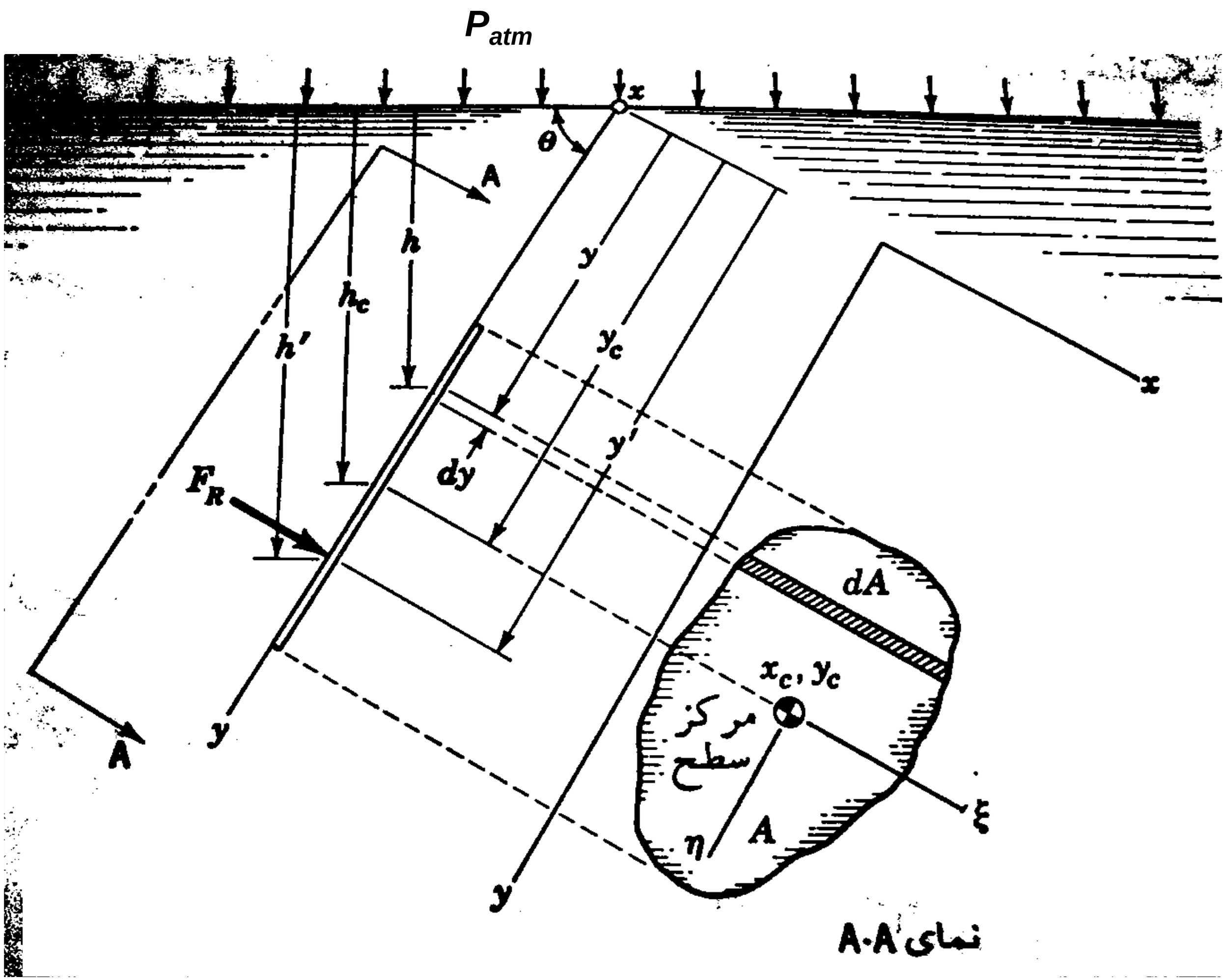
Hydrostatics (2)

Mohsen Soltanpour
Email: soltanpour@kntu.ac.ir
URL: http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح مسطح غوطه ور در سیال غیر قابل تراکم ساکن

(Static incompressible submerged fluid)



بدلیل عدم وجود تنش برشی، نیروی وارد بر سطوح غوطه ور عمود بر آن می باشد. برآیند نیروی فشار ناشی از فشار یکنواخت (P_{atm}) برابر است با:

$$\int_A P_{atm} dA = P_{atm} \int_A dA = P_{atm} A$$

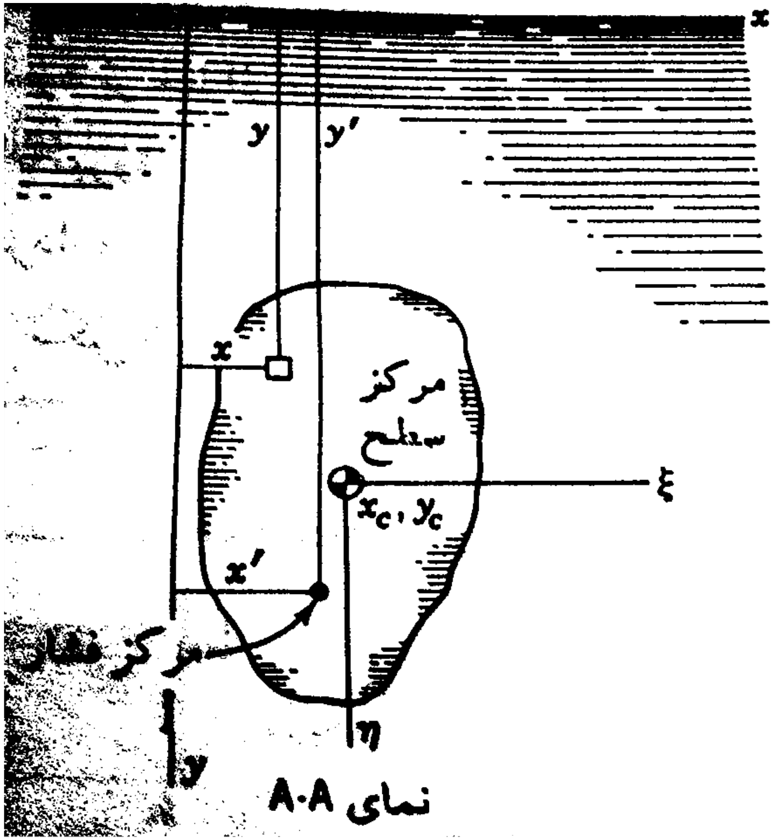
جزء سطحی اختیاری
واقع بر سطح جسم

برای بدست آوردن فشار هیدرواستاتیک سیال، نوار dA را به شکلی انتخاب می‌کنیم که تمام نقاط آن عمق یکسانی داشته باشند.

در این حالت فشار وارد بر تمام نقاط یکنواخت و برابر γh می‌باشد. جزء نیروی وارد بر dA:

$$dF = \gamma h dA$$

بنابراین کل نیروی وارد بر سطح A:



$$F_R = \int_A dF = \int_A (\gamma h) dA = \gamma \sin\theta \int_A y dA$$

ممان استاتیک سطح حول محور xها $= A y_c$

$$\Rightarrow$$

$$F_R = \gamma \sin\theta y_c A = \gamma h_c A = \underline{P_c A}$$

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم فشار یکنواختی برابر P_c (فشار در مرکز سطح) به تمام صفحه اثر می‌کند.

برای بدست آوردن محل اثر نیروی برآیند F_R (y')، لنگر توزیع فشار نسبت به محور xها را در نظر می‌گیریم:

$$F_R y' = \int_A \overbrace{\underbrace{(\gamma h) dA \times y}_{dM_x}}^{dF}$$

$$\gamma h_c A y' = \int_A \gamma y \sin\theta y dA$$

$$\gamma \sin\theta y_c A y' = \gamma \sin\theta \int_A y^2 dA$$

$$\gamma \sin\theta y_c A y' = \gamma \sin\theta I_{xx} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y' = \frac{I_{xx}}{A y_c}}$$

که در آن I_{xx} ممان دوم سطح حول محور xها است.

اگر به جای I_{xx} عبارت $I_{\xi\xi}+Ay_c^2$ را قرار دهیم که $I_{\xi\xi}$ ممان دوم سطح حول محور ξ عبوری از مرکز سطح به موازات محور xها می‌باشد:

$$y' = \frac{A y_c^2 + I_{\xi\xi}}{A y_c} = \boxed{y_c + \frac{I_{\xi\xi}}{A y_c}}$$

نقطه اثر نیروی برآیند وارد بر سطح غوطه‌ور مرکز فشار (Center of pressure) نامیده می‌شود. مرکز فشار همواره زیر مرکز سطح قرار می‌گیرد:

$$\frac{I_{\xi\xi}}{A y_c} > 0 \quad \Longrightarrow \quad y' > y_c$$

برای محاسبه x'، فاصله مرکز فشار از محور yها، لنگر نیروی برآیند F_R و لنگر توزیع فشار نسبت به محور yها را در نظر می‌گیریم:

$$F_R x' = \int_A \underbrace{\overbrace{(\gamma y \sin\theta) dA}^{dF} \times x}_{dM_y}$$

جزء سطح متناظر با نقطه (x,y)

$$(\gamma \sin\theta y_c A) x' = \gamma \sin\theta \int_A xy dA$$

$$y_c A x' = I_{xy} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x' = \frac{I_{xy}}{A y_c}}$$

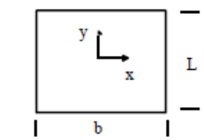
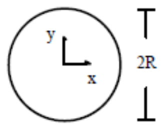
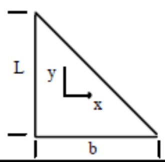
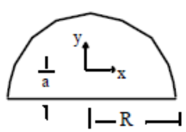
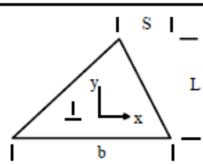
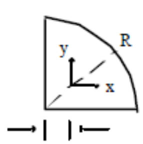
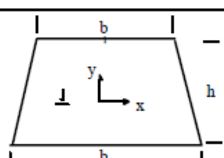
که در آن I_{xy} حاصل ضرب اینرسی (Product of inertia) دستگاه نسبت به محورهای x و y است.

اگر به جای I_{xy}، $I_{\xi\eta}$ ممان دوم عبوری از مرکز سطح را قرار دهیم:

$$x' = \frac{A x_c y_c + I_{\xi\eta}}{A y_c} = \boxed{x_c + \frac{I_{\xi\eta}}{A y_c}}$$

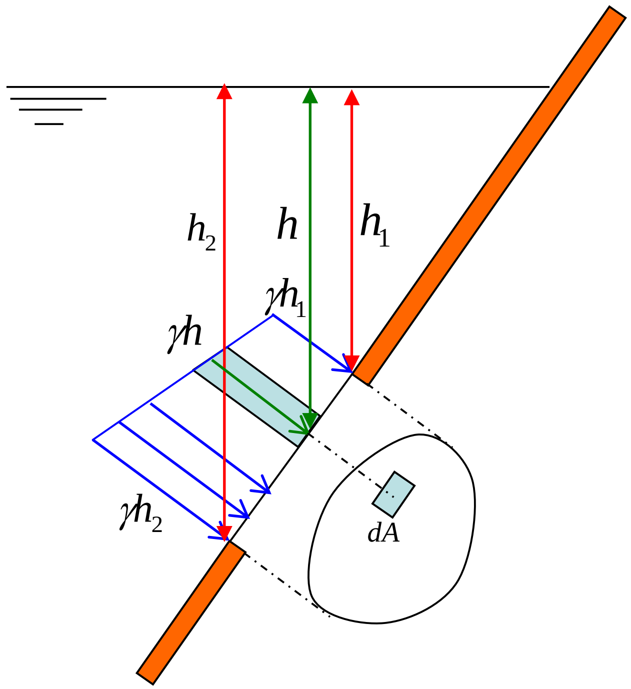
ξ و η به ترتیب موازی و عمود بر خط اثر صفحه و سطح آزاد می‌باشند. از آنجایی که $I_{\xi\eta}$ می تواند مثبت یا منفی باشد، مرکز فشار در هر دو طرف خط $x=x_c$ ممکن است قرار بگیرد. چنانچه یکی از محورهای ξ و η محور تقارن سطح باشد، $I_{\xi\eta}$ صفر شده و مرکز فشار بر روی خط $x=x_c$ قرار می‌گیرد.

مرکز سطح و ممان اینرسی سطوح مسطح

Geometry	Centroid	Moment of Inertia I_{xx}	Product of Inertia I_{xy}	Area
	$b/2,\ L/2$	$\dfrac{bL^3}{12}$	0	$b \cdot L$
	$0, 0$	$\dfrac{\pi R^4}{4}$	0	πR^2
	$b/3,\ L/3$	$\dfrac{bL^3}{36}$	$-\dfrac{b^2L^2}{72}$	$\dfrac{b \cdot L}{2}$
	$0, a = \dfrac{4R}{3\pi}$	$R^4\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{8}{9\pi}\right)$	0	$\dfrac{\pi R^2}{2}$
	$a = \dfrac{L}{3}$	$\dfrac{bL^3}{36}$	$\dfrac{b(b-2s)L^2}{72}$	$\dfrac{1}{2} b \cdot L$
	$a = \dfrac{4R}{3\pi}$	$\left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right)R^4$	$\left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{4}{9\pi}\right)R^4$	$\dfrac{\pi R^2}{4}$
	$a = \dfrac{h(b+2b_1)}{3(b+b_1)}$	$\dfrac{h^3(b^2+4bb_1+b_1^2)}{36(b+b_1)}$	0	$(b+b_1)\dfrac{h}{2}$

منشور فشار: (Pressure prism)

روش دیگر حل مسئله نیروی وارد بر سطوح مسطح غوطه‌ور تعیین نیروی برآیند و محل اثر آن استفاده از منشور فشار می‌باشد. این منشور حجم منشوری شکلی است که قاعده اش سطح صاف اعمال فشار بوده و ارتفاعش با رابطه $P=\gamma h$ بدست می‌آید (h فاصله عمودی تا سطح آزاد واقعی یا فرضی مایع می‌باشد).



جزء نیروی وارد بر dA :

$$dF = \gamma h dA = dV$$

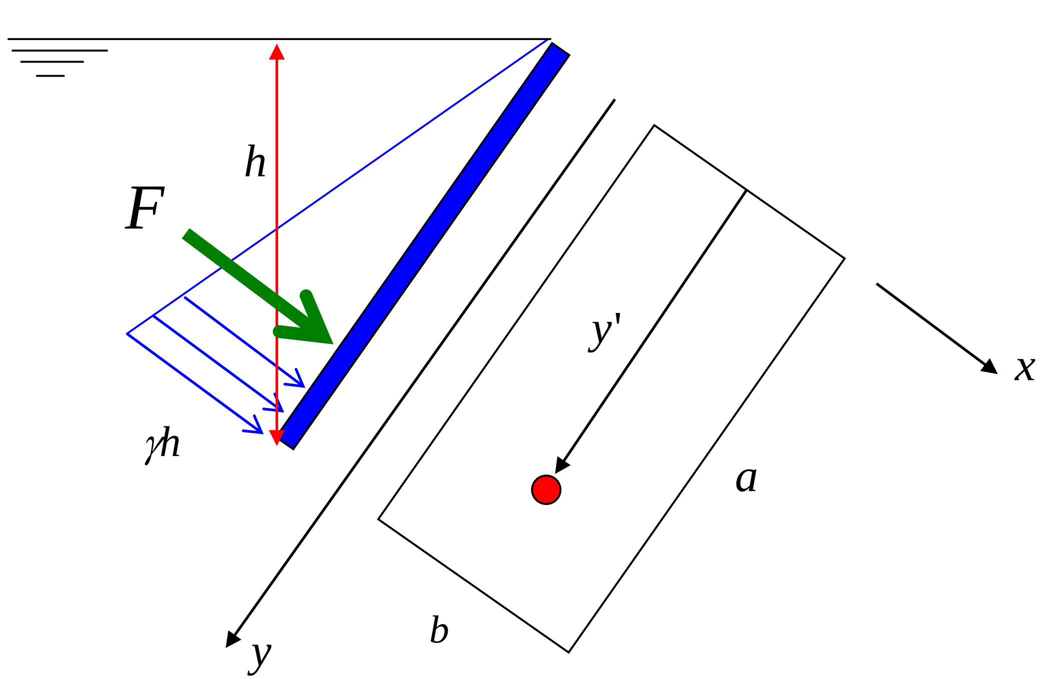
که یک عنصر حجم از منشور فشار می باشد. بنابراین کل نیروی وارده (برآیند فشار اعمال شده به سطح) برابر است با حجم منشور فشار:

$$F = \int_V dV = V$$

نیروی F از مرکز حجم منشور فشار می‌گذرد:

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V x dV \\[2ex] y_P = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V y dV \end{cases}$$

در بعضی شکلهای ساده روش منشور فشار بسیار مناسبتر از روش انتگرال گیری می‌باشد. مثلا در سطح مستطیل شکلی که ضلع فوقانی آن منطبق بر سطح آزاد مایع است، منشور فشار سه گوش (گوه‌ای شکل) است:



با استفاده از روابط قبل:

$$\begin{cases} F = P_c A = \gamma h/2\,(ab) = \dfrac{\gamma hab}{2} \\ y' = y_c + \dfrac{I_{\zeta\zeta}}{Ay_c} \\ = \dfrac{a}{2} + \dfrac{\frac{1}{12}ba^3}{ab(a/2)} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{6} = \dfrac{2a}{3} \end{cases}$$

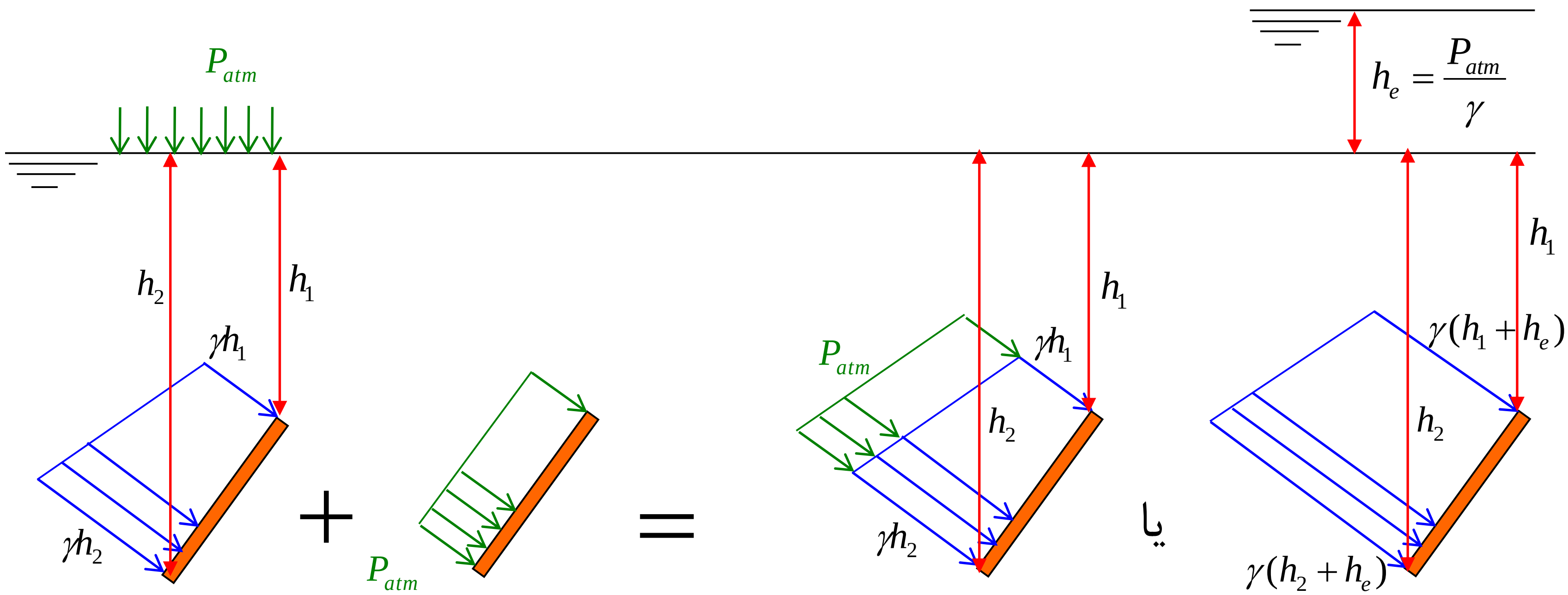
با استفاده از روش منشور فشار:

$$\begin{cases} F = V = \frac{1}{2}(\gamma h \times a \times b) = \dfrac{\gamma hab}{2} \\ y' = \dfrac{2a}{3} \end{cases}$$

(مرکز حجم در 1/3 قاعده قرار دارد)

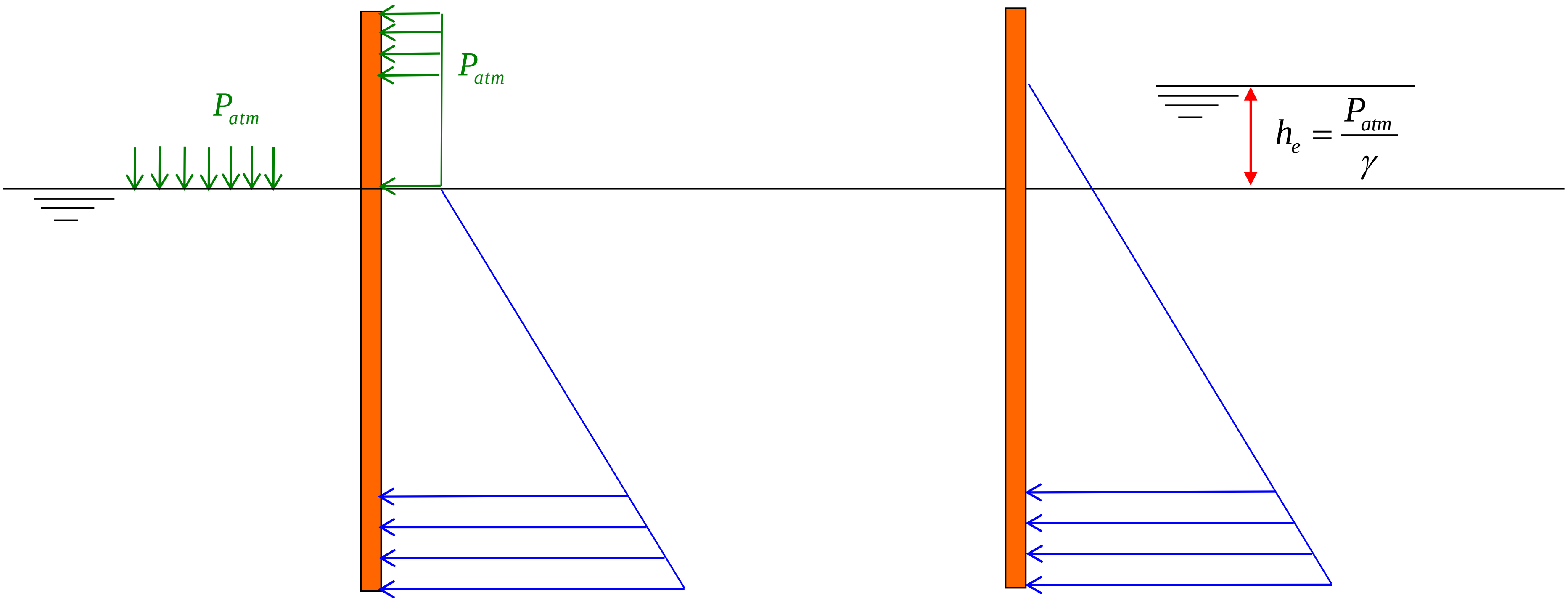
ارتفاع معادل سیال (Equivalent height)

تاثیر فشار یکنواخت وارد بر سطح سیال را می توان با افزایش فرضی ارتفاع سیال جایگزین نمود. بدین منظور کافیست ارتفاع معادل به گونه ای انتخاب شود که فشار یکسانی در سطح سیال اعمال گردد:



استفاده از روش ارتفاع معادل گاهی راه حل ساده‌تری در تعیین مقدار و محل اثر نیروی وارده از طرف سیال ارائه می‌دهد.

واضح است که توزیع فشار صرفا در پایین تر از تراز سیال می‌تواند بدین روش تعیین شود و استفاده از این روش در بالاتر از تراز سیال اشتباه است:

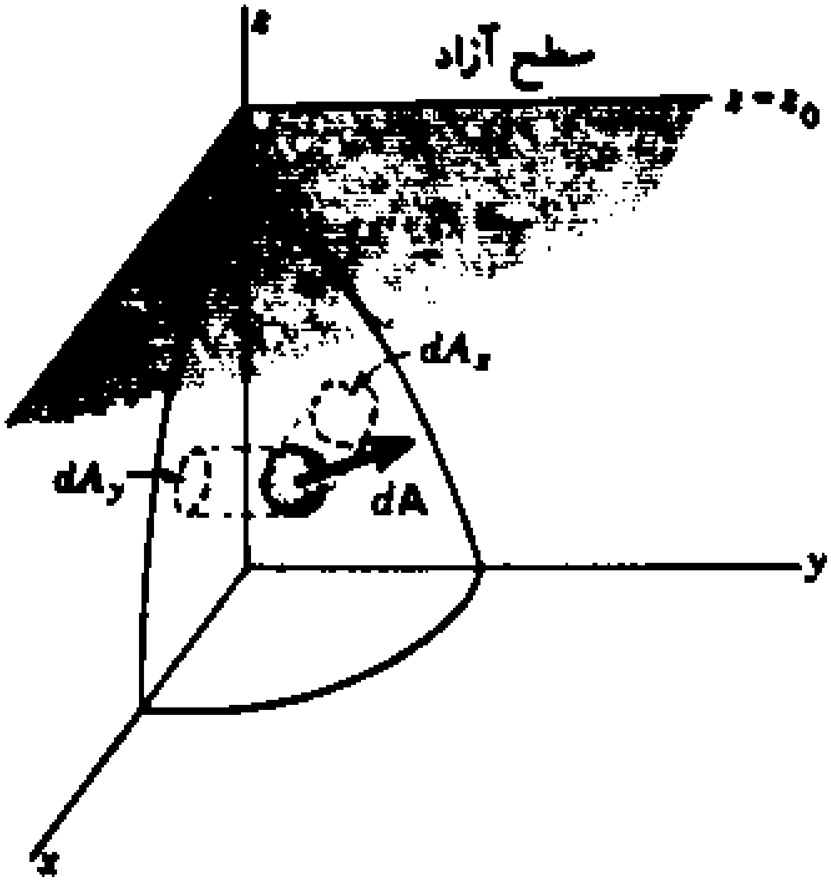


فشار صحیح

توزیع فشار در بالاتر از تراز آب غلط است.

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح منحنی غوطه ور

(Hydrostatic force on curved submerged surfaces)



نیروی وارد بر المان عمود بر سطح آن المان بوده و برابر است با:

$$d\vec{F} = -p d\vec{A}$$

که در آن $d\vec{A}$ همراستا با $\vec{n}$ (طبق قرارداد به طرف خارج پوسته- صرفنظر از تقعر یا تحدب آن) است:

$$d\vec{A} = dA\vec{n}$$

با ضرب داخلی طرفین در بردار $\vec{i}$:

$$d\vec{F}.\vec{i} = -p d\vec{A}.\vec{i}$$

$$dF_x = -p dA_x$$

که در آن dA_x تصویر المان dA بر روی سطح yz است. با انتگرال‌گیری بر روی صفحه yz (یا هر صفحه دیگر عمود بر محور xها):

$$F_x = \int_{A_x} -p dA_x$$

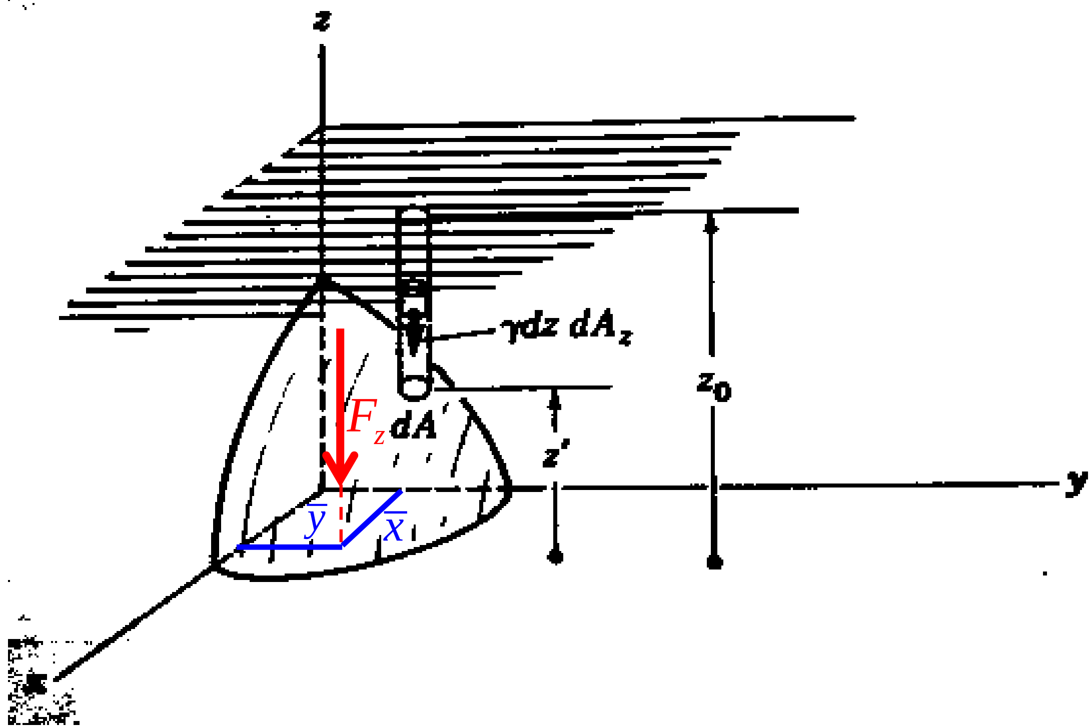
بنابراین مسئله نیروی وارد بر سطح منحنی به تعیین نیروی وارده به صفحه مسطح غوطه‌وری که بر سطح آزاد عمود است منجر می‌شود. به شکل مشابه:

$$F_y = \int_{A_y} -p dA_y$$

بدین ترتیب دو مولفه نیروی برآیند را می‌توان با روشهای مربوط به سطوح مسطح غوطه ور بدست آورد. این مولفه‌ها با سطح آزاد موازی هستند (مقدار و محل اثر نیروهای افقی وارده بر سطح مورب با مقدار و محل اثر نیروهای وارد بر تصاویر سطح مورب در دو راستا - سطوح مسطح - یکسانست).

نیروهای افقی و قائم ناشی از فشار جو وارد بر سطوح منحنی شکل نیز بسادگی به همین روش تعیین می‌گردند ($P=P_{atm}$) و تنها کافیست تصویر سطح منحنی شکل بر روی صفحات yz، xz یا xy در نظر گرفته شود: *

$$\begin{cases} F_x = \int_{A_x} -p_{atm} dA_x = -p_{atm} A_x \\ F_y = \int_{A_y} -p_{atm} dA_y = -p_{atm} A_y \\ F_z = \int_{A_z} -p_{atm} dA_z = -p_{atm} A_z \end{cases}$$



برای تعیین مولفه عمود بر سطح آزاد:

$$d\vec{F} = -pd\vec{A}$$

$$d\vec{F}.\vec{k} = -pd\vec{A}.\vec{k}$$

$$dF_z = -pdA_z$$

$$= -\left(\int_{z'}^{z_0} \gamma dz\right)dA_z = -\int_{z'}^{z_0} \gamma dz dA_z$$

که در آن $\gamma dz dA_z$ وزن المان کوچکی از سیال است که داخل ستون سیال از روی المان تا سطح آزاد ادامه دارد.

رابطه فوق در سیال تراکم‌پذیر نیز صادق است. از انتگرال‌گیری dF_z بر روی تمام سطح، F_z برابر وزن کل سیال روی سطح منحنی بدست می‌آید.

علامت منفی نشان می دهد که به یک سطح منحنی که تصویر dA_z آن مثبت است (بخش فوقانی یک جسم) نیرویی در جهت خلاف محور z (به طرف پایین) وارد می‌شود.

با فرض γ ثابت:

$$F_z = \int_{A_z} -pdA_z$$

$$= -\int_{A_z} \gamma(z_0 - z')dA_z = -\gamma\int_{A_z}(z_0 - z')dA_z = -\gamma\int_V dV = -\gamma V$$

منشوری با قاعده dA_z و ارتفاع z_0-z'

حجم مایع بالای سطح منحنی غوطه‌ور

خط اثر مولفه قائم، با مساوی قرار دادن گشتاور مولفه های قائم جزئی (متناظر با dA_z) حول محورهای x و z بدست می آید:

$$\begin{cases} \bar{x} = -\dfrac{\gamma \int_V x dV}{F_z} = \dfrac{\gamma \int_V x dV}{-\gamma V} = \dfrac{\int_V x dV}{V} \\ \bar{y} = -\dfrac{\gamma \int_V y dV}{F_z} = \dfrac{\gamma \int_V y dV}{-\gamma V} = \dfrac{\int_V y dV}{V} \end{cases}$$

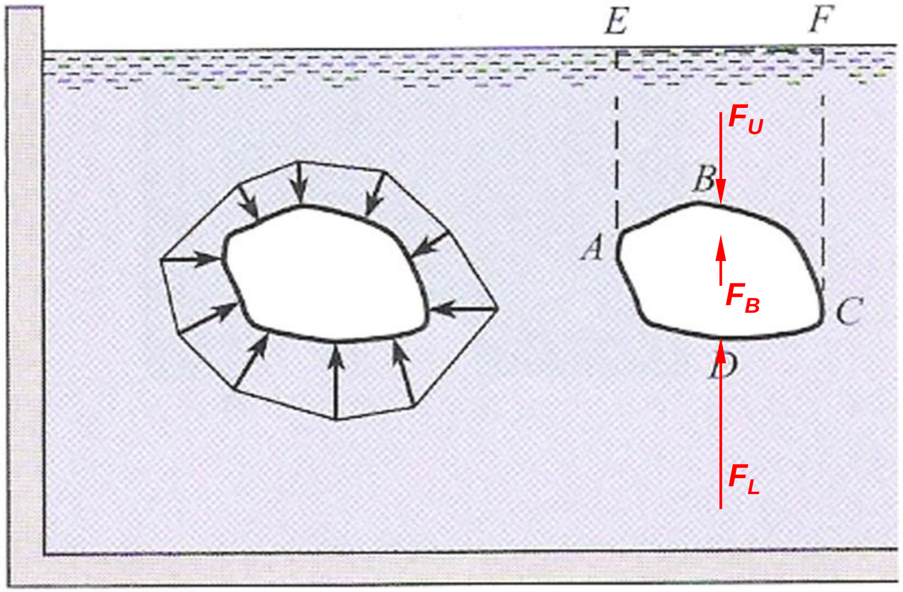
$$\begin{cases} F_z \bar{x} = -\int_V x \gamma dV & (\text{لنگرگیری حول محور } y) \\ F_z \bar{y} = -\int_V y \gamma dV & (\text{لنگرگیری حول محور } z) \end{cases}$$

بنابراین خط اثر نیروی قائم از مرکز حجم سیال روی سطح منحنی تا سطح آزاد فرضی یا واقعی عبور می کند. در ساختن یک سطح آزاد ذهنی، مایع فرضی باید از همان وزن مخصوص مایع در تماس با سطح منحنی برخوردار باشد تا توزیع فشار روی سطح صحیح باشد.

خط اثر سه مولفه نیروهای افقی و نیروی قائم لزوما در یک نقطه تلاقی نمی کنند. به عبارت دیگر برآیند نیروهای وارده لزوما نیروی منفردی نیست. در مسائل عملی می توان از مولفه های قائم و موازی با سطح آزاد استفاده کرد.

نتایج این بخش محدود به سیالات غیر قابل تراکم نبوده و در هر سیالی معتبر است. در سیال تراکم پذیر، خط اثر نیروی قائم از مرکز ثقل (یا مرکز جرم با فرض شتاب ثقل ثابت) سیال بالای سطح منحنی می‌گذرد.

نیروی شناوری (Buoyant force)



نیروی بر آیند اعمال شده بر یک جسم توسط سیال ایستا که جسم در آن غوطه‌ور یا روی آن شناور می‌باشد، نیروی شناوری نامیده می‌شود.

از آنجایی که تصویر قائم جسم غوطه ور یا ناحیه غوطه ور جسم شناور در مایع همواره صفر است، نیروی شناوری همواره به سمت بالا بوده و مولفه افقی ندارد.

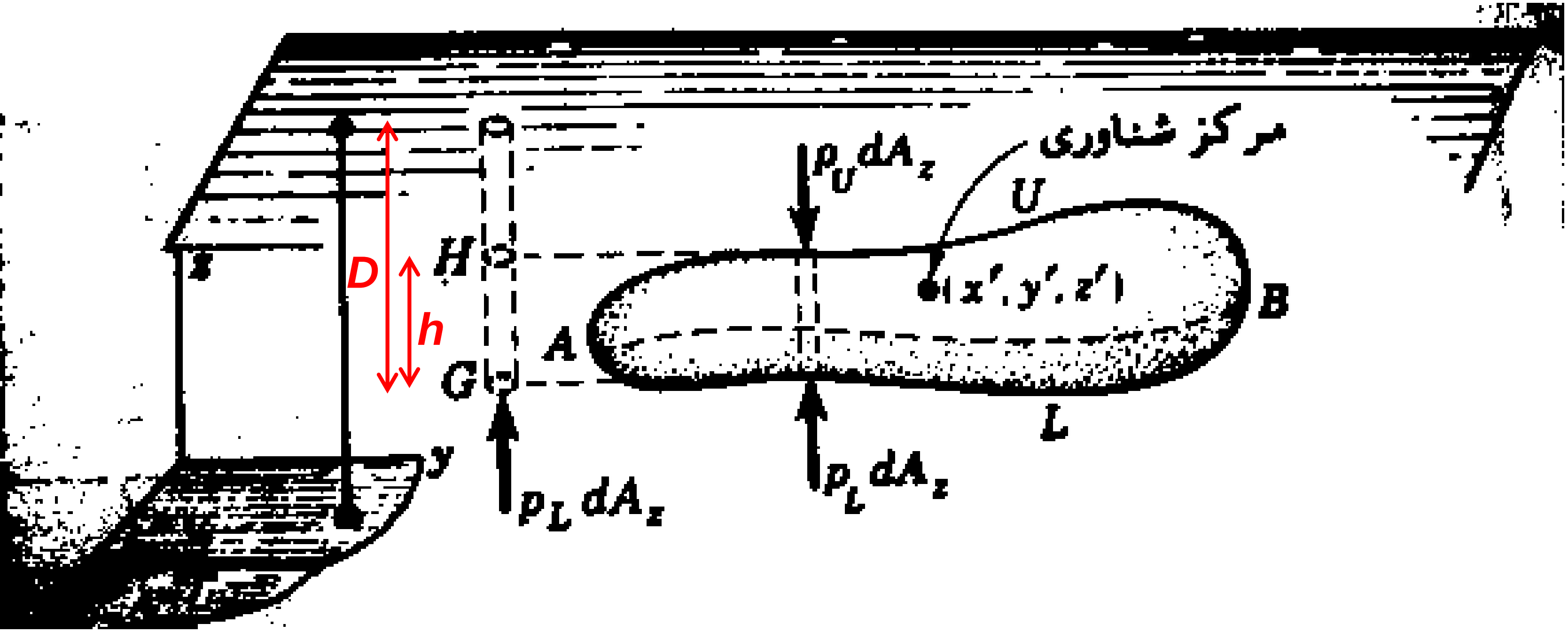
در مسائل شناوری روابط مربوط به نیروهای وارد بر سطوح مستقیم یا منحنی قابل استفاده می‌باشند، اما با توجه به شرایط جسم کاملا غوطه‌ور یا شناور می توان روابط ساده‌تری ارائه نمود.

دو حالت زیر در نظر گرفته می شوند:

۱- جسم به طور کامل در سیال غوطه‌ور است.

۲- جسم در سطح مشترک دو سیال غیر محلول قرار دارد.

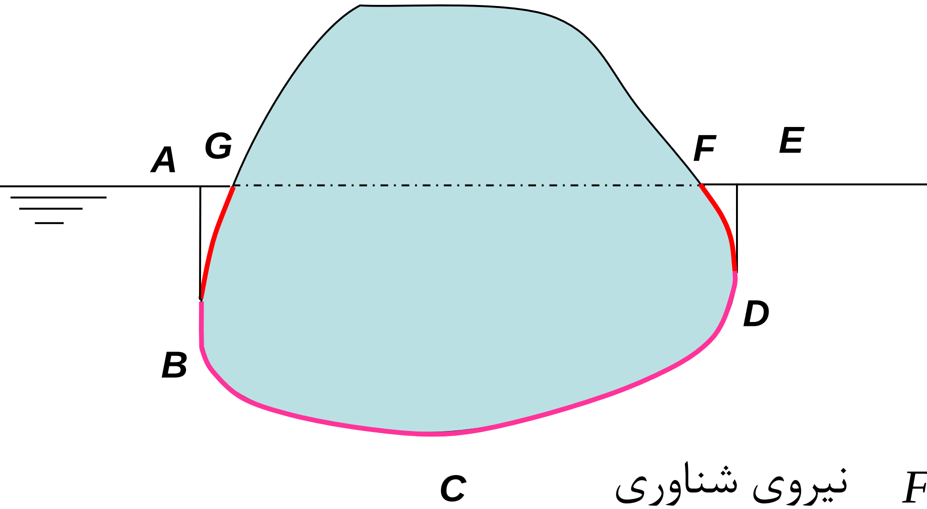
جسم کاملا غوطه‌ور در آب را به دو بخش فوقانی AUB و تحتانی ALB تقسیم می‌کنیم:



اگر ستون قائمی با سطح مقطع dA_z را در نظر بگیریم، نیروی قائم وارد بر بالای آن $P_u dA_z$ (وزن ستونی از سیال به سطح مقطع dA_z و ارتفاع روی المان تا سطح آزاد) می‌باشد.

فشار P_L پایین ستون با فشار ستونی فرضی از سیال که از کف المان تا سطح آزاد ادامه می یابد برابر است. بنابراین اختلاف بین نیروی فوقانی $P_u dA_z$ و نیروی تحتانی $P_L dA_z$ برابر است با وزن ستون سیال GH که مقطع و ارتفاع آن با ستون داخل جسم برابر است. با در نظر گرفتن تمام ستونهای داخل جسم غوطه ور، نیروی خالص بالابرنده جسم برابر است با وزن سیال جابجا شده (اصل ارشمیدس، Archimedes principle). در اصل ارشمیدس محدودیتی برای تراکم‌پذیری وجود ندارد.

به طریق مشابه در اجسام شناور نیز نیروی بالابرنده برابر با وزن سیال جابجا شده می‌باشد:



نیروی شناوری

نیروی وارد بر BCD ↑

نیروی وارد بر BG ↓

$$F_Z = W(ABCDE) - [W(ABG) + W(DEF)]$$
$$= W(GBCDF)$$

نیروی وارد بر FD ↓

مرکز شناوری (Center of buoyancy)

مرکز شناوری نقطه ای از فضا است که نیروی شناوری در آن اثر می کند. در شکل اسلاید قبل:

$$dF_B = (P_L - P_U)dA_Z$$

برابر وزن ستون فرضی المان کوچکی (عبوری از داخل جسم) از سیال بوده و در سیال تراکم پذیر و تراکم ناپذیر صحیح است. اگر سیال تراکم ناپذیر را در نظر بگیریم:

$$dF_B = [(D\gamma - (D-h)\gamma]dA_Z = \gamma h dA_Z$$

با انتگرال‌گیری بر روی کل جسم:

$$F_B = \gamma \int h dA_Z = \gamma V$$

که V حجم جسم غوطه‌ور است (این رابطه اثبات اصل ارشمیدس در سیال تراکم ناپذیر است). با لنگرگیری حول محور y ها:

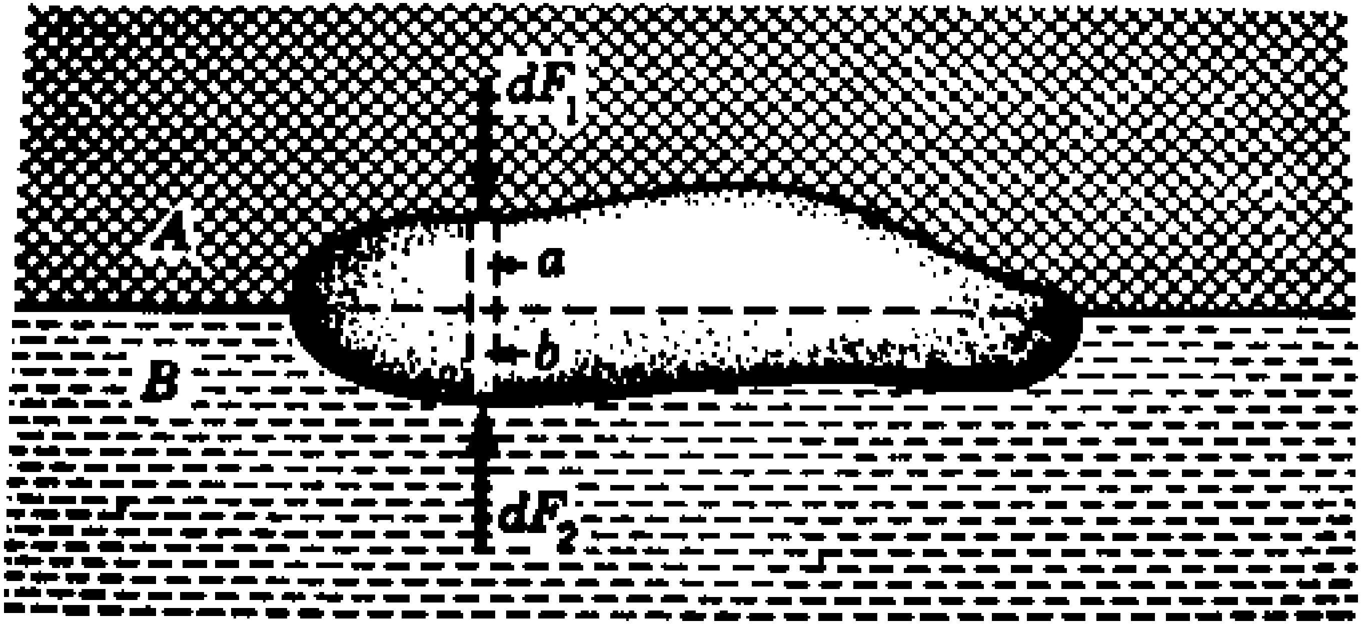
$$x' F_B = \gamma \int xh dA_Z = \gamma \int_V x dV$$

$$x' \gamma V = \gamma \int_V x dV \quad \Longrightarrow \quad x' = \frac{\int_V x dV}{V}$$

به طریق مشابه با لنگرگیری حول محور x ها:

$$y' = \frac{\int_V y dV}{V}$$

بنابراین نیروی شناوری وارده بر جسم واقع در سیال غیر قابل تراکم از مرکز حجمِ حجم جابجا شده توسط جسم می‌گذرد. در سیالات تراکم پذیر باید مرکز ثقل سیال جابجا شده (یا مرکز جرم با ثابت فرض کردن شتاب ثقل در محدوده ارتفاع جسم غوطه ور) در نظر گرفته شود.



در حالتی که جسم در مرز بین دو سیال محلول قرار داشته باشد (مثلا جسم شناور در آب با در نظر گرفتن هوای روی آب):

$$dF_2 - dF_1 = W_a(A) + W_b(B)$$

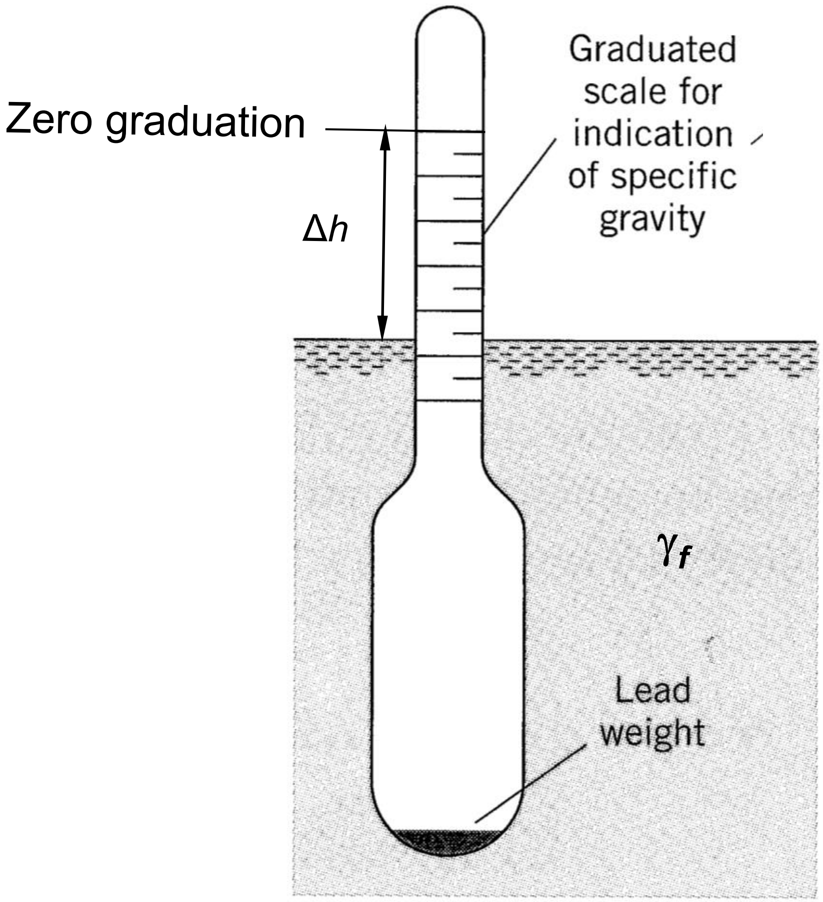
وزن ستون a از سیال A وزن ستون b از سیال B

با انتگرال‌گیری بر روی کل جسم نیروی شناوری برابر وزن دو سیال جابجا شده خواهد بود. در صورتی که وزن مخصوص دو سیال متفاوت باشد مرکز شناوری لزوما از مرکز حجم سیال جابجا شده عبور نمی‌کند*.

با توجه به وزن مخصوص ناچیز هوا، در مباحث کشتیرانی می‌توان از تاثیر هوا صرفنظر کرده و مرکز شناوری را منطبق بر مرکز حجم سیال جابجا شده در نظر گرفت.

هیدرومتر (Hydrometer)

ابزاری است که با استفاده از قانون شناوری برای تعیین وزن مخصوص سیالات بکار می‌رود. از آنجایی که نیروی شناوری تابعی از وزن مخصوص سیال است و با توجه به ثابت بودن وزن هیدرومتر، میزان فرووی هیدرومتر در سیال تابعی از وزن مخصوص سیال می باشد:



$$W_{hydrometer} = V_{submerged}\gamma_f$$

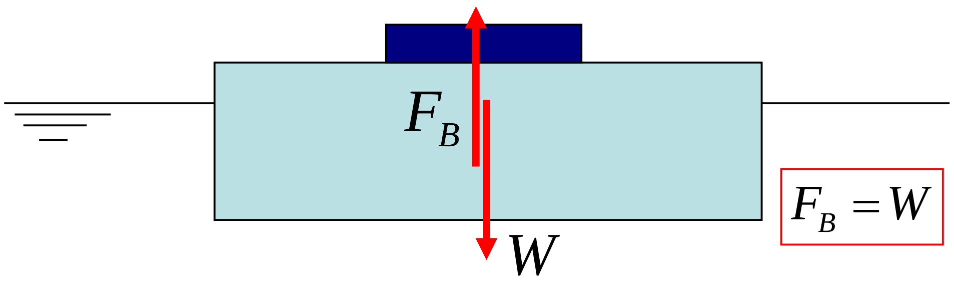
$$\begin{cases} \gamma_f \uparrow \Rightarrow V_{submerged} \downarrow (\Delta h \uparrow) \\ \gamma_f \downarrow \Rightarrow V_{submerged} \uparrow (\Delta h \downarrow) \end{cases}$$

بنابراین با مدرج کردن راستای قائم می‌توان وزن مخصوص سیال را بدست آورد:

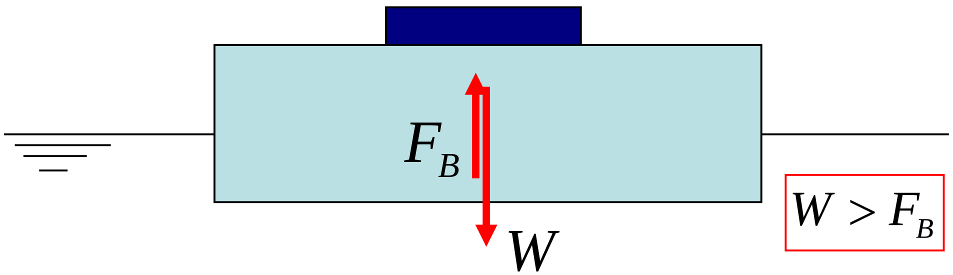
$$\Delta h = f(\gamma_f)$$

پایداری اجسام شناور و غوطه‌ور

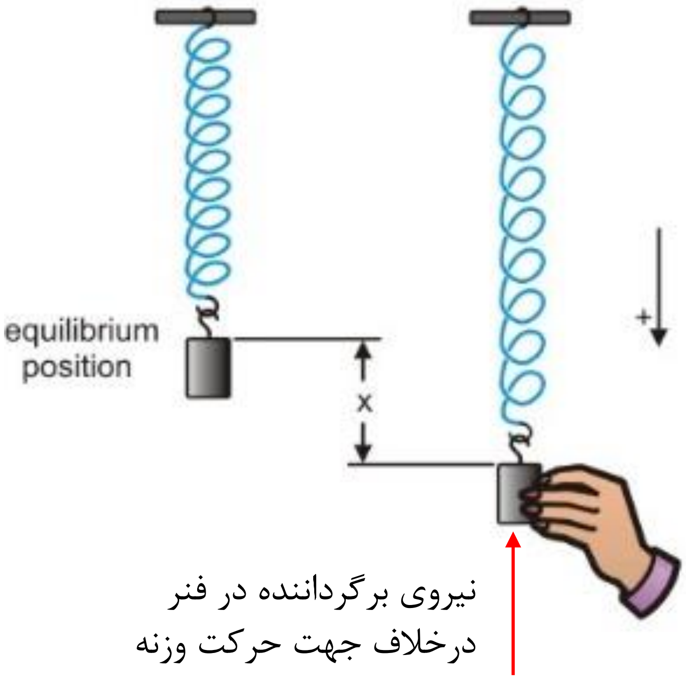
جسمی دارای پایداری خطی است که هر گاه تغییر مکان کوچک خطی به آن اعمال شود، نیروی بازگرداننده‌ای در آن ایجاد شود که تمایل به بازگرداندن جسم به موقعیت اولیه‌اش داشته باشد. وزنه متصل به فنر و جسم شناور در مایع ایستا پایداری قائم دارند.



در حالت تعادل نیروی شناوری و وزن با هم برابرند.

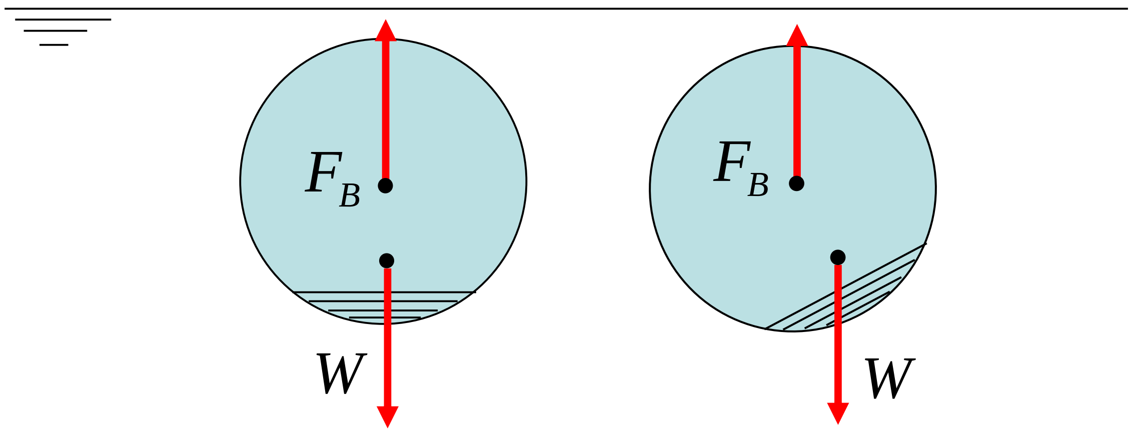


در صورت بالا (یا پایین) رفتن جسم شناور، نیروی شناوری تغییر کرده و اختلاف نیروی شناوری و وزن تمایل به برگرداندن جسم شناور به وضعیت متعادل بالا را دارد.



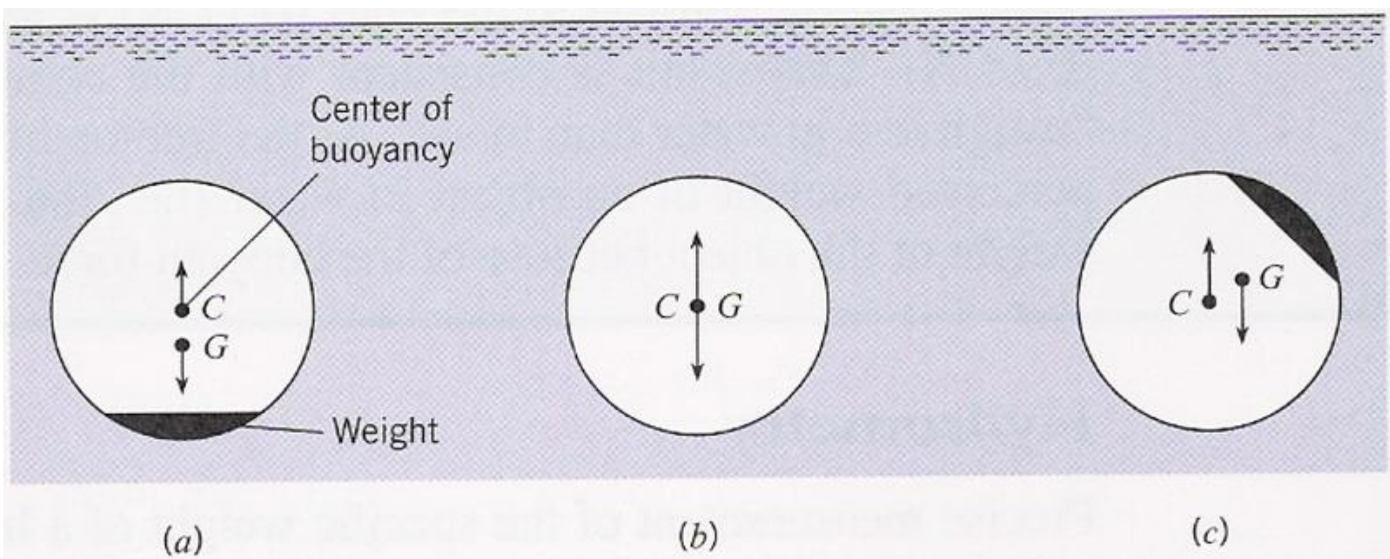
در صورت تغییر مکان قائم وزنه (به بالا یا پایین)، نیروی مازادی خلاف جهت تغییر مکان در فنر ایجاد می شود که تمایل به برگرداندن آن به وضعیت تعادل دارد.

اجسام غوطه ور



در شکل مقابل حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت گشتاور برگرداننده‌ای در جهت عقربه‌های ساعت برای برگرداندن جسم به وضعیت اولیه ایجاد می‌کند.

پایین تر بودن مرکز ثقل جسم نسبت به مرکز شناوری شرط لازم و کافی برای پایدار بودن اجسام غوطه‌ور است.



پایدار (Stable)
مرکز ثقل پایینتر از مرکز شناوری قرار دارد.

خنثی (Neutral)
مرکز ثقل و مرکز شناوری بر هم منطبق هستند.

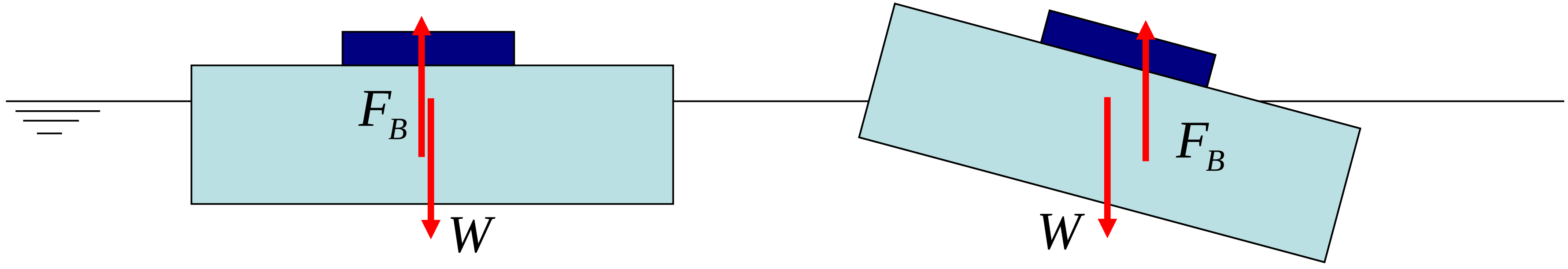
ناپایدار (Unstable)
مرکز ثقل بالاتر از مرکز شناوری قرار دارد.

اجسام شناور

یک جسم ممکن است بطور پایدار، ناپایدار و یا خنثی در سیال شناور باشد. اگرچه پایین تر بودن مرکز ثقل جسم نسبت به مرکز شناوری شرط لازم برای پایدار بودن اجسام غوطه‌ور (مثلا بالونها) است اما این شرط برای پایداری اجسام شناور ضروری (لازم) نیست.*

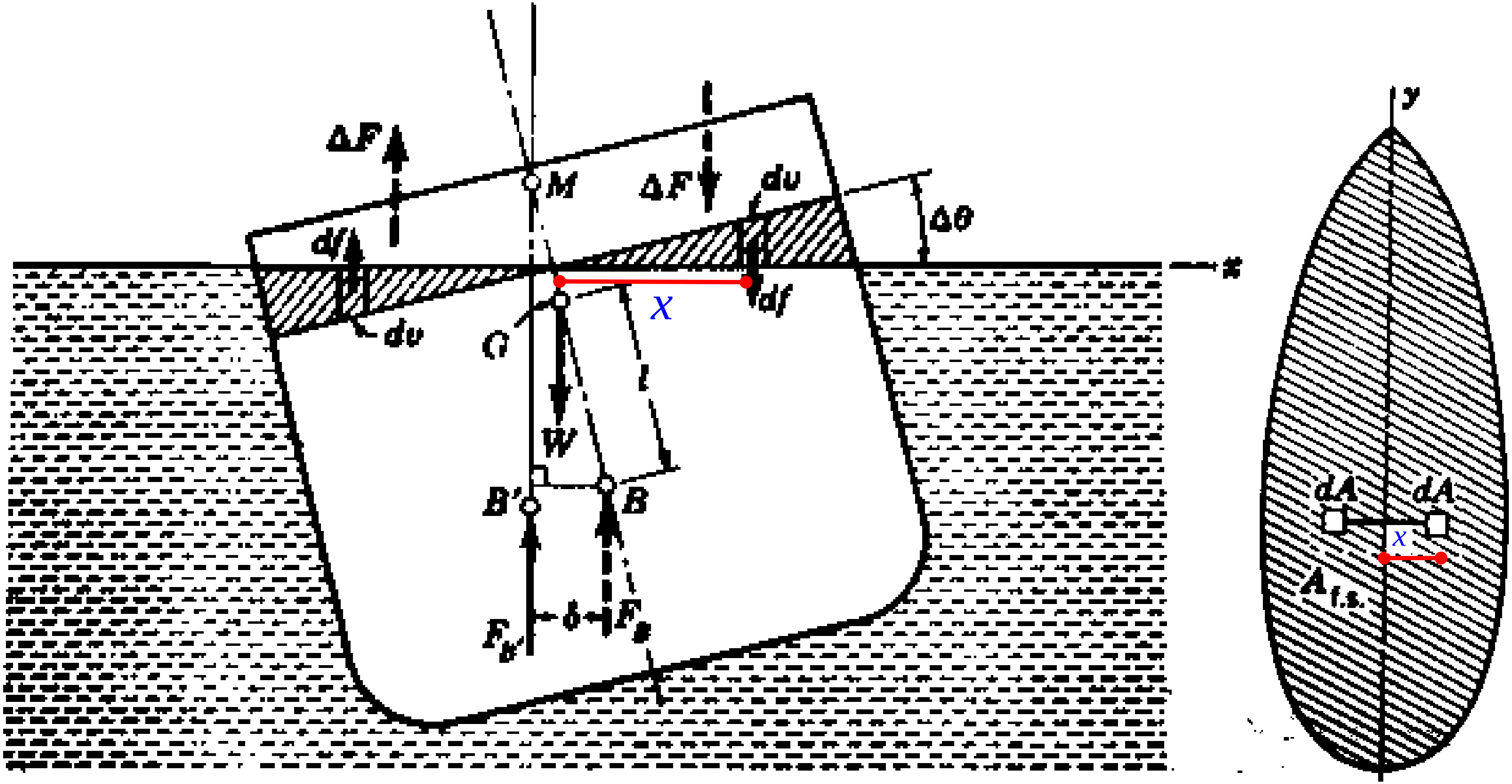
همانگونه که در شکل زیر ملاحظه می شود با وجود بالاتر بودن مرکز ثقل نسبت به مرکز شناوری بدلیل اینکه در اثر چرخش جسم مرکز شناوری جابجا می‌شود، گشتاور ایجاد شده باز دارنده بوده و جسم را به وضعیت اولیه بر می‌گرداند.

مقاطع مستطیلی عریض اشکال بسیار پایداری هستند زیرا در اثر غلطیدن مقدار زیادی سیال جابجا شده و باعث می‌شود که مرکز شناوری تغییر مکان زیادی به سمت قسمت کج شده بدهد و گشتاور برگرداننده نسبتا بزرگی ایجاد شود.

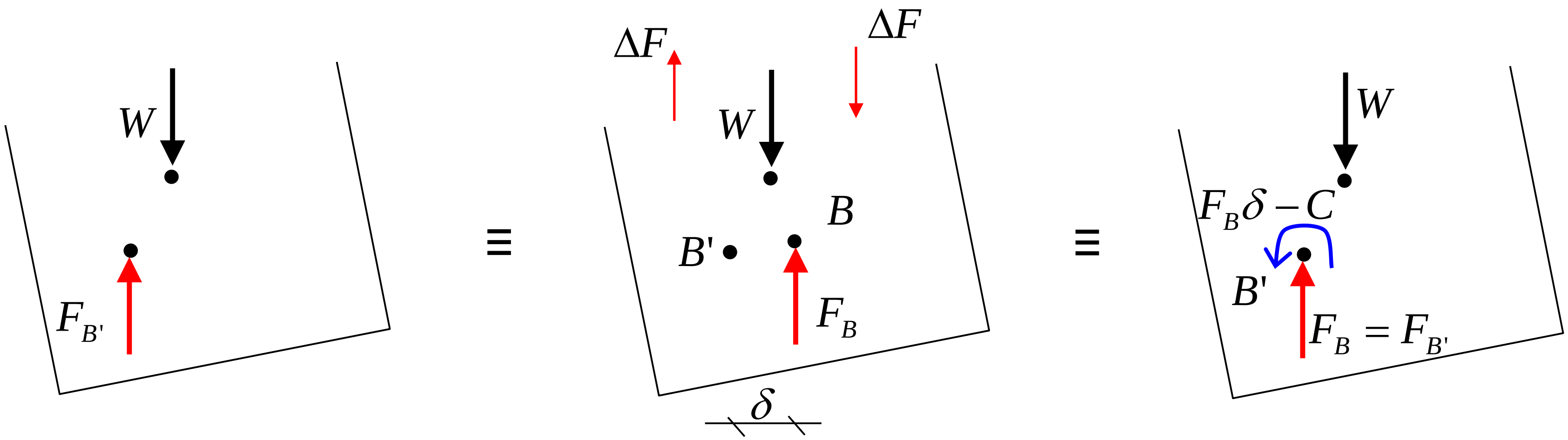


مطابق شکل دوران کوچک $\Delta\theta$ را حول محور تقارن yها در نظر می‌گیریم. مرکز شناوری از B به B' منتقل می‌شود.

دوران کشتی در اثر افزایش حجم جابجا شده سمت چپ نیروی بالابرنده ΔF و بدلیل کاهش حجم آب جابجا شده در سمت راست نیروی رو به پایین ΔF ایجاد می شود. لنگر حاصل از این زوج نیرو C می‌باشد.



نیروی $F_{B'}$ (وارد بر مرکز شناوری جدید) حاصل جمع تاثیر F_B و C می باشد:



$$F_B\delta - C = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \delta = \frac{C}{F_B} = \frac{C}{W} \qquad \text{(I)} \qquad (F_B = F_{B'} = W)$$

اما $\quad \sin\Delta\theta = \dfrac{\delta}{\overline{MB}}$ و یا $\quad \overline{MB} = \dfrac{\delta}{\sin\Delta\theta} \quad \text{(II)}$

اگر نقطه M که به شکل فوق تعیین می شود در بالای نقطه G قرار گیرد ($\overline{MB} > \overline{GB}$)، نیروی شناوری و نیروی وزن گشتاور بازدارنده‌ای ایجاد می کنند و به عبارت دیگر کشتی پایدار است. ضمنا هر چه $\overline{MG}$ بزرگتر باشد، گشتاور ایجاد شده بزرگتر بوده و کشتی پایدارتر است.

$\overline{MG}$ معیاری برای پایداری بوده و ارتفاع متاسنتریک (Metacentric) نامیده می‌شود. اگر M روی G واقع شود تعادل خنثی و اگر زیر آن باشد وضعیت ناپایدار خواهد بود.

برای تعیین لنگر MG باید C محاسبه شود:

جزء حجم $dV=(x\Delta\theta)dA$

$$\Longrightarrow\quad df=\gamma dV=\gamma x\Delta\theta dA$$

$$C=\int_{A_{f.s.}} x\,df \overset{*}{=} \int_{A_{f.s.}} \gamma x^2\Delta\theta dA=\gamma\Delta\theta\int_{A_{f.s.}} x^2 dA=\gamma\Delta\theta I_{yy}$$

مقطع بدنه کشتی در امتداد سطح آزاد (free surface)

ممان دوم سطح حول
محور y ها

با توجه به معادله (I):

$$\begin{cases} C=\gamma\Delta\theta I_{yy} \\ \delta=\dfrac{C}{W}\end{cases}\Longrightarrow\quad \delta=\frac{\gamma\Delta\theta I_{yy}}{W}$$

با در نظر گرفتن معادله (II):

$$\overline{MB}=\frac{\delta}{\sin\Delta\theta}=\frac{\gamma\Delta\theta I_{yy}}{W\sin\Delta\theta}$$

و یا (در $\Delta\theta$ کوچک): $\overline{MB}=\dfrac{\gamma I_{yy}}{W}$

اگر فاصله $\overline{BG}$ را با l نمایش دهیم، ارتفاع متاسنتریک برابر است با:**

$$\overline{MG}=\overline{MB}-l=\frac{\gamma I_{yy}}{W}-l$$

$$\begin{cases} \overline{MG}>0 & \text{تعادل پایدار} \\ \overline{MG}=0 & \text{تعادل خنثی} \\ \overline{MG}<0 & \text{تعادل ناپایدار}\end{cases}$$

Hendijan (1385)

Morro Bay, California (December 4, 2007)

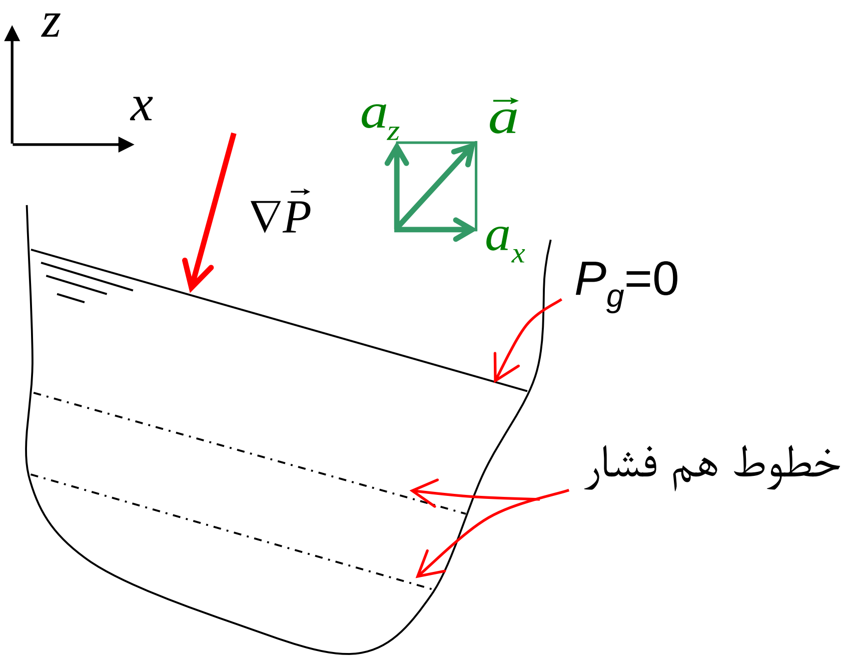


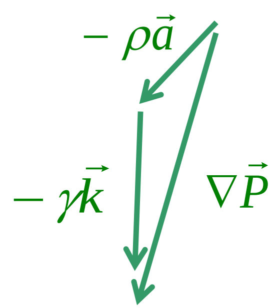

انتقال و دوران سیالات (Translation and Rotation of fluids)

در سیالات ایستا بدلیل نبودن تنش برشی، محاسبه تغییرات فشار ساده است. سیال هنگام انتقال با سرعت یکنواخت نیز تحت قوانین تغییرات فشار استاتیک قرار دارد. همچنین زمانی که سیال شتاب ثابتی دارد، ذرات نسبت به یکدیگر حرکت نسبی نداشته (حرکت صلب گونه سیال) و تنش برشی ایجاد نمی گردد.

شتاب خطی یکنواخت

فرض می کنیم به مایعی که درون ظرفی باز قرار دارد شتاب یکنواخت a (در صفحه xz) اعمال شود:





با استفاده از معادله اصلی حرکت یا قانون دوم نیوتن:

$$d\vec{f} = -\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k} = \rho\vec{a}$$

$$-(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}) - \gamma\vec{k} = \frac{\gamma}{g}(a_x\vec{i} + a_z\vec{k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{-\gamma}{g} a_x \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma(1+\dfrac{a_z}{g}) \end{cases}$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

$$= -\frac{\gamma}{g}a_x dx - \gamma(1+\frac{a_z}{g})dz$$

با انتگرال گیری برای سیالات غیر قابل تراکم (P_0 فشار حقیقی یا موهومی در مبدا)*:

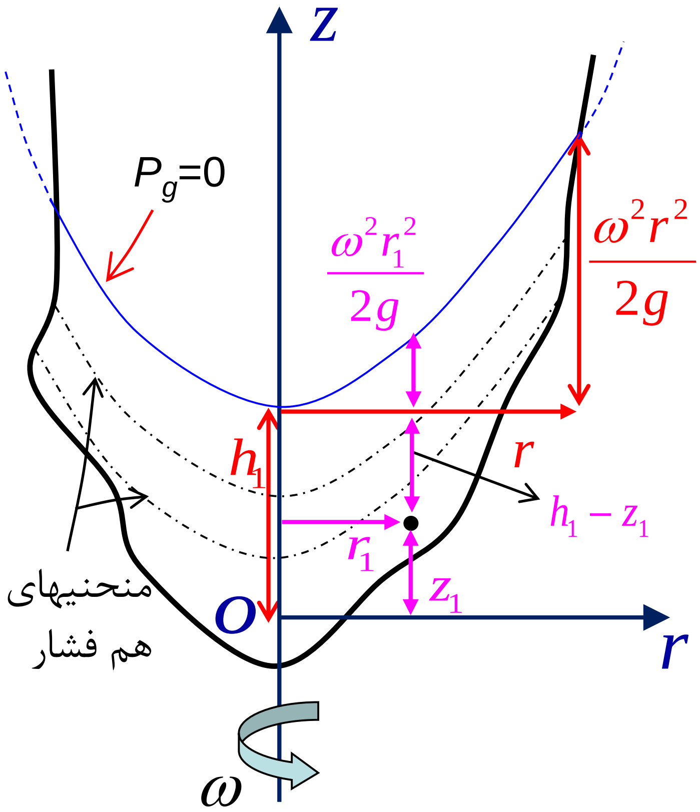
$$\boxed{P(x,z) = -\frac{\gamma}{g}a_x x - \gamma(1+\frac{a_z}{g})z + P_0}$$

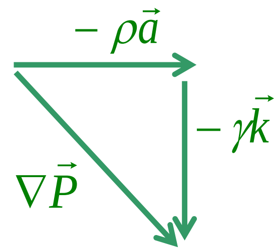
برای بدست آوردن معادله تراز آزاد آب کافیست فشار برابر صفر قرار داده شود:

$$\underline{-\frac{\gamma}{g}a_x x - \gamma(1+\frac{a_z}{g})z + P_0 = 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-\gamma/g\, a_x}{\gamma(1+\frac{a_z}{g})} = \underline{\frac{-a_x}{g+a_z}}$$

با توجه به اینکه رابطه شیب سطح آزاد مستقل از شکل ظرف است حل مسائل با استفاده از آن شروع شود.

دوران حول یک محور قائم





در دوران سیال با سرعت زاویه‌ای ثابت حول یک محور قائم نیز سیال حرکت صلب گونه داشته و تنش برشی در هیچ نقطه‌ای از سیال ایجاد نمی‌گردد و در این وضعیت شتاب جانب مرکز (به سمت محور دوران) و شتاب ثقل وجود دارند.

با فرض سرعت زاویه ای ω، هر جزء از سیال دارای شتابی شعاعی به سمت محور دوران و متناسب با شعاع دوران می‌باشد ($\vec{e}_r$ بردار واحد در امتداد شعاع در سیستم مختصات استوانه ای است):

$$\vec{a} = -r\omega^2\vec{e}_r$$

با استفاده از معادله اصلی حرکت (قانون دوم نیوتن):

$$d\vec{f} = -\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k} = \rho\vec{a}$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) - \gamma\vec{k} = -r\omega^2\rho\vec{e}_r$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{\gamma}{g}\omega^2 r \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \end{cases} \qquad dP = \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

$$= \frac{\gamma}{g}\omega^2 r dr - \gamma dz$$

با انتگرال‌گیری برای سیالات غیر قابل تراکم (P_0 فشار حقیقی یا موهومی در مبدا O):

$$\boxed{P(r,z) = \frac{\gamma\omega^2 r^2}{2g} - \gamma z + P_0}$$

اگر تراز آب در محور دوران با h_1 نشان داده شود:

$$\begin{cases} r = 0 \\ z = h_1 \end{cases} \qquad P = 0 \Longrightarrow 0 = -\gamma h_1 + P_0$$

و یا $P_0 = \gamma h_1 \Longrightarrow P(r,z) = \dfrac{\gamma\omega^2 r^2}{2g} - \gamma z + \gamma h_1$

$$= \gamma(\underbrace{\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z + h_1})$$

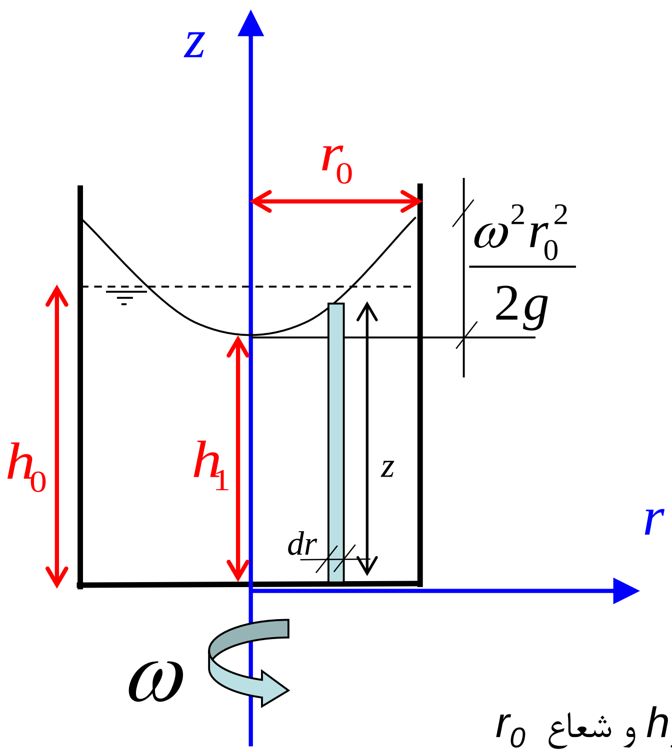
ارتفاع سیال واقعی یا موهومی بالای نقطه (r,z)*

بنابراین در این حالت بجای استفاده از رابطه فشار می‌توان از ضرب تراز آب واقعی یا موهومی در وزن مخصوص مایع نیز استفاده کرد.**

برای بدست آوردن معادله تراز آزاد آب:

$$P(r,z)=\gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}-z+h_1\right)=0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{z(r)=\frac{\omega^2 r^2}{2g}+h_1}$$

بنابراین معادله سطح آزاد یک سهموی است که راس آن بر روی محور دوران در $z=h_1$ قرار دارد. در یک استوانه دوار می‌توان روابط صریحی با توجه به بقای جرم داخل استوانه ارائه نمود. اگر ارتفاع اولیه مایع قبل از دوران را h_0 فرض کنیم:



$$\pi r_0^2 h_0=\int_0^{r_0}(2\pi r)z\,dr$$

$$=\int_0^{r_0}(2\pi r)\left(h_1+\frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)dr$$

$$=2\pi\left[h_1\frac{r^2}{2}+\frac{\omega^2 r^4}{8g}\right]_0^{r_0}$$

$$=\pi h_1 r_0^2+\frac{\pi\omega^2 r_0^4}{4g}$$

حجم استوانه ای به ارتفاع h_1 و شعاع r_0

حجم زیر سطح سهموی و بالای h_1 :*

$$\left(\frac{1}{2}\times\pi r_0^2\times\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}\right)$$

بنابراین:

$$\pi r_0^2 h_0 = \pi h_1 r_0^2 + \frac{\pi\omega^2 r_0^4}{4g}$$

و یا

$$h_0 = h_1 + \frac{\omega^2 r_0^2}{4g} \rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

یعنی h_0 از وسط ارتفاع سهمی می‌گذرد.*

$$z = h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$= h_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$\boxed{z(r) = h_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}[0.5 - (\frac{r}{r_0})^2]}$$

این رابطه معادله سطح آزاد استوانه‌ای به شعاع r_0 و ارتفاع اولیه h_0 را درحرکت دوار نشان می‌دهد. توجه شود که این معادله درصورت سرریزی مایع و یا سر بسته بودن و رسیدن مایع به بالای ظرف صادق نیست.